Egy nevezetes numerikus sor

Markó Zoltán

2009. március 5.

Célunk π-t közelítő numerikus sor előállítása, ehhez átnézzük a következő fogalmakat.

1. Definíció (hiperharmonikus sor). *Hiperharmonikus sornak nevezzük a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

numerikus sort.

A hiperharmonikus sor $\alpha = 1$ esetén a közismert harmonikus sor, amely divergens. Könnyen belátható viszont, hogy ha $\alpha > 1$, akkor a sor már konvergens. $\alpha = 2$ esetben a sorösszeg kapcsolatba hozható π-vel.

A π a matematika egyik legnevezetesebb irracionális száma, a kör átmérőjének és kerületének aránya. Előállítására többféle módszer ismert, most az egyik numerikus sorral történő felírás helyességét látjuk be, mely π^2-et közelíti. Ehhez használjuk a *Fourier-sor* fogalmát.

2. Definíció (Fourier-sor). $f(x) \in \mathcal{C}[2\pi]$, *$2\pi$-periodikus valós függvény Fourier-sorának nevezzük a*

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

trigonometrikus sort, ahol a megfelelő együtthatók:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\, dx; \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cos kx\, dx; \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin kx\, dx.$$

Értelemszerűen, mivel f 2π-periodikus, ezért az integrált a $[-\pi, \pi]$ intervallumon is számolhatjuk. Ha f páros, akkor $f(x) \cos kx$ páros, $f(x) \sin kx$ páratlan. Így

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x, \text{ illetve } b_k = 0.$$

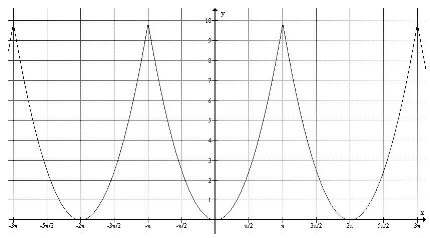
Hasonlóan, ha f páratlan, akkor $f(x)\cos kx$ páratlan, $f(x)\sin kx$ páratlan, emiatt

$$a_k = 0, \text{ illetve } b_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin kx \,\mathrm{d}x.$$

A Fourier-sor bizonyos (számunkra kedvező) esetben előállítja az $f(x)$ függvényt. Ahhoz, hogy segítségével sorösszeget határozzunk meg, már a pontonkénti konvergencia is megfelelő egy bizonyos pontban, az egyenletes konvergencia nem szükséges. A következőkben egy megfelelő függvény Fourier-sorával igazoljuk, hogy a $\sum \frac{1}{n^2}$ numerikus sor segítségével meghatározható π^2.

3. Tétel. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

Bizonyítás: Tekintsük az $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$ függvényt, illetve ennek 2π-periodikus kiterjesztését (1. ábra).



1. ábra.

Írjuk fel f Fourier-sorát. Mivel f páros, ezért a fentiek szerint $b_k = 0$. A többi együttható:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\cdot 2\int\limits_0^{\pi} x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Emellett parciális integrálással:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_0^{\pi} x^2\cos kx \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\left[x^2\cdot\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{\pi} - \int\limits_0^{\pi} 2x\frac{\sin kx}{k}\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\pi^2\cdot\underbrace{\frac{\sin k\pi}{k}}_{=0} - \frac{2}{k}\int\limits_0^{\pi} x\sin kx \,\mathrm{d}x\right) = -\frac{4}{\pi k}\cdot\int\limits_0^{\pi} x\sin kx \,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{4}{\pi k}\left(\left[x \cdot \frac{-\cos kx}{x}\right]_0^\pi + \int\limits_0^\pi \frac{\cos kx}{x}\,\mathrm{d}x\right) = -\frac{4}{\pi k}\left(\pi \cdot \frac{-\cos k\pi}{k} + \frac{1}{k}\int\limits_0^\pi \cos kx\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \frac{4}{k^2}\cdot \cos k\pi - \frac{4}{\pi k^2}\cdot\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^\pi = \frac{4\cos k\pi}{k^2} - \frac{4}{\pi k^2}\cdot \underbrace{\frac{\sin k\pi}{k}}_{=0} = \frac{4\cos k\pi}{k^2} = 4\cdot\frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Tehát $a_0 = \dfrac{2\pi^2}{3}$, $a_k = 4\cdot\dfrac{(-1)^k}{k^2}$, illetve $b_k = 0$, így 2. definíció értelmében f Fourier-sora:

$$F(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx.$$

Könnyen igazolható, hogy f folytonos és teljesíti a Lipschitz-feltételt, emiatt pontonként a Fourier-sor f-hez tart: $F(x_0) \to f(x_0)$. Tekintsük az $x_0 = \pi$ pontot. Itt a függvény értéke egyrészt: $f(\pi) = \pi^2$, másrészt a pontonkénti konvergencia miatt a Fourier-sor $x_0 = \pi$-ben elő is állítja a függvényt, így:

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= F(x_0)\\
\pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\underbrace{\cos k\pi}_{=(-1)^k}\\
\frac{2\pi^2}{3} &= 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2k}}{k^2}\\
\frac{2\pi^2}{12} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\\
\frac{\pi^2}{6} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}
\end{aligned}$$

Ez pedig éppen a bizonyítandó állítás. □