A Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij - egyenlőtlenség diszkrét alakjának elemi bizonyítása

Markó Zoltán

2009. január 9.

1. Tétel (CSB-egyenlőtlenség). *Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tetszőleges valós számok. Ekkor*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Bizonyítás. Írjuk fel az $(a_i x + b_i)^2$ alakú polinomokat 1-től n-ig. Ezekről tudjuk, hogy nemnegatívak, és mivel $(a_i x + b_i)^2 = a_i^2 x^2 + 2a_i b_i x + b_i^2$, ezért

$$\begin{aligned}
a_1^2 x^2 + 2a_1 b_1 x + b_1^2 &\geq 0 \\
a_2^2 x^2 + 2a_2 b_2 x + b_2^2 &\geq 0 \\
&\vdots \\
a_n^2 x^2 + 2a_n b_n x + b_n^2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Adjuk össze a kapott egyenlőtlenségeket:

$$\begin{aligned}
(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)x^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)x + b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 &\geq 0 \\
\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 &\geq 0
\end{aligned}$$

A kapott egyenlőtlenség csak úgy lehet igaz, ha a másodfokú kifejezés diszkriminánsa nempozitív, vagyis

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 &\geq 0 \\
&\Updownarrow \\
4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - 4 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) &\leq 0 \\
\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)
\end{aligned}$$

Mivel mindkét oldal nemnegatív, vonhatunk négyzetgyököt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Ez pedig a bizonyítandó állítás, és végig ekvialens átalakításokat hajtottunk végre, a kiinduló állításhoz hasonlóan ez is igaz. □