Hetedik heti gyakorlat

1. A legkisebb négyezetek módszerével határozzuk meg azt az egyenest, amely legjobban illeszkedik a következő pontokra: $(2,1); (3,2); (5,3); (6,4)$. (Segítség: az egyenes alakja: $y = a + bx$, a pontok $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ akkor:
$$\begin{bmatrix} n & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \end{bmatrix}$$
)

2. Határozzuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenlet legkisebb négyzetes megoldását és határozzuk meg a legkisebb négyzetes hibát is a következő esetben:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Legyen $B = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$. Bizonyítsuk, be, hogy B egy pozitív definit mátrix és találjunk olyan pozitív definit C mátrixot, melyre $C^2 = B$.

4. Legyen $C = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ Határozzuk meg a C mátrix szinguláris érték felbontását! (Segítség: Legyenek α_1^2, α_2^2 az $A^T A$ mátrix sajátértékei $(\alpha_1 \geq \alpha_2)$. Legyen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ a megfelelő egység hosszú sajátvektorok. Legyen $\mathbf{u}_i = \frac{1}{\alpha_i} A \cdot \mathbf{v}_i$. Ekkor $A = UDV^T$, ahol D az a diagonális mátris aminek főátlójában α_1, α_2 van és U, V a megfelelő $\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i$ oszlop vektorokból áll.)

5. Legyen
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x < 2; \\ 0, & \text{ha } x = 2. \end{cases}$$
Határozzuk meg az $f(x)$ tiszta szinuszos Fourier sorát a $[0, 2]$ intervallumon.