Ötödik heti gyakorlat

1. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg a következő altereket: $\mathrm{row}(A), \mathrm{col}(A), \mathrm{null}(A), \mathrm{null}(A^T \cdot A)$. Továbbá határozzuk meg $\mathrm{nullity}(A) =?$ és és $\mathrm{rank}(A^T \cdot A) =?$ (Számoljuk ki direktbe és NE az órán tanult tétellel az $A^T \cdot A$-ra vonatkozó kérdéseket.)

2. Az előző feladatban adott A mátrixra ellenőrizzük, hogy $\mathrm{row}(A)^\perp = \mathrm{null}(A)$ és $\mathrm{col}(A)^\perp = \mathrm{null}(A^T)$.

3. Legyen $B = \frac{1}{9} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$. Igazoljuk, létezik olyan ℓ egyenes, hogy P az $\mathbb{R}^3$-ból az ℓ egyenesre történő merőleges vetítés lineáris transzformációnak a mátrixa. Határozzuk meg az ℓ egyenest! (Segítség: Tanultuk, hogy ha $P^2 = P$, P szimmetrikus és $\mathrm{rank}(P) = k$, akkor P egy k-dimenziós altérre vett merőleges vetítés mátrixa. Ezen altér= $\mathrm{col}(P)$)

4. Írjuk fel az $\mathbb{R}^3$-ból a $2x-y+3z = 0$ síkra való merőleges vetítés mátrixát! Ennek segítségével határozzuk meg a $\mathbf{v} = (2, 4, -1)$ vektornak az $2x - y + 3z = 0$ síkra való merőleges vetületét! (Segítség: Tanultuk, hogy ha M egy olyan mátrix aminek oszlopai a sík bázis vektorai, akkor $P = M(M^T M)^{-1} M^T$).

5. Legyen $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Legyen P_r az $\mathbb{R}^4$-ből $\mathrm{row}(A)$-ra való merőleges vetítés mátrixa. Továbbá legyen P_c az $\mathbb{R}^3$-ból $\mathrm{col}(A)$-ra való merőleges vetítés mátrixa. Határozzuk meg a P_c és a P_r mátrixokat.