Feladat: Egy edényt kell elmosnunk, ehhez 50 ml víz áll rendelkezésünkre. Kezdetben 1 ml szennyeződés található benne. A tisztítás úgy történik, hogy valamennyi vizet beleöntünk, az egyenletesen elkeveredik a benne lévő folyadékkal, majd kiöntjük, és a keverékből 1 ml benne marad. A cél az, hogy a kezdeti szennyeződés minél kisebb része maradjon az edényben. Használjuk ki minél jobban at 50 ml vizet.

Megoldás:

Öntsünk hozzá n-szer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vizet, ekkor $\sum_{i=1}^{n} x_i = 50$. Egy alkalommal a szennyezettség mértéke $\frac{1}{1+x_i}$-szeresére változik, így n lépés után a koncentráltságot a $\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)}$ szorzat írja le. Írjuk fel a számtani-mértani közép közti egyenlőtlenséget n db $\frac{1}{1+x_i}$-re:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)} \le \frac{\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{n+50}{n}$$

$$\Updownarrow$$

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \le \left(\frac{n+50}{n}\right)^n$$

$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)}$ minimális, ha $\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)$ maximális. Mivel az n lépésszám nem meghatározott, ehhez a maximumhoz csak tetszőlegesen közel kerülhetünk, de el nem érhetjük:

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \le \left(\frac{n+50}{n}\right)^n = \left(1+\frac{50}{n}\right)^n \to e^{50}.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)} \ge \frac{1}{\left(1+\frac{50}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e^{50}}$.

Tehát a minimum szennyezettség, amit megközelíthetünk: $\frac{1}{e^{50}}$. A kapott eredményből az is látszik, hogy ez akkor közelíthető, ha minél több lépésben adunk hozzá vizet (n nagy), és hogy minden lépésben azonos mennyiségű vizet kell hozzáadni. □