Harmadik heti gyakorlat

1. Legyen $L = L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_4)$ a következő vektorok által kifeszített altér:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   (a) Határozzuk meg L-nek egy olyan B bázisát, amelynek elemei a fenti $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_4$ vektorok közül kerülnek ki. Ebben a bázisban adjuk meg a B-ben nem szereplő vektor (vagy vektorok) koordinátáit. (Használjuk a Gauss-Jordan eliminációt.)

   (b) Határozzuk meg L-nek egy ortonormált bázisát. Használjuk a Gram-Schmidt eljárást, melynek első két lépése a jegyzetemből a feladatok után, lent bemásolva.

2. Legyen e az $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ egyenletű egyenes a síkon. Írjuk le az e egyenesre való vetítésnek mint lineáris transzformációnak a mátrixát a természetes bázisban.

3. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. Állítsuk elő az A mátrixot egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegeként.

4. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ és $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ Határozzuk meg $A : B$-t!

5. Határozzuk meg az $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix spektrál-felbontását!

6. Az oszlop-sor szabályt alkalmazva bontsuk fel egy-rangú mátrixok összegére az $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrixot!

Gram-Schmidt eljárás: a jegyzetből kimásolva:

1. PÉLDA: Határozzuk meg az $L(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ egy ortonormált bázisát (azaz k db vektort az $L(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$-ban, melyek hossza 1 és páronként merőlegesek)!

Megoldás: Ha $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ lineárisan független, akkor először egy ortogonális $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k$ bázisát adjuk meg az $L(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$-nak, majd a kívánt ortonormált rendszert a
$\frac{\mathbf{b}_1}{|\mathbf{b}_1|}, \ldots, \frac{\mathbf{b}_k}{|\mathbf{b}_k|}$ adja.

Legyen $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$. Határozzuk meg azt az α_1-et, amire

$$\mathbf{b}_2 = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2$$

teljesíti a $\mathbf{b}_2 \perp \mathbf{b}_1$ feltételt. Vagyis:

$$0 = \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_1 = \alpha_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1.$$

Innen

$$\alpha_1 = -\frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1}.$$

Ekkor tehát $\mathbf{b}_2 \in L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ és $\mathbf{b}_2 \perp \mathbf{b}_1$.

Határozzuk meg azt a β_1, β_2 értéket, amire a

$$\mathbf{b}_3 = \beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3$$

vektorra teljesül, hogy $\mathbf{b}_3 \perp \mathbf{b}_1$ és $\mathbf{b}_3 \perp \mathbf{b}_2$. Vagyis:

$$0 = \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_1 = \beta_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \underbrace{\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_1}_{0} + \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_1 \Rightarrow \beta_1 = -\frac{\mathbf{a}_3 \mathbf{b}_1}{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_1}.$$

Továbbá

$$0 = \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_2 = \beta_1 \underbrace{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2}_{0} + \beta_2 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_2 \Rightarrow \beta_2 = -\frac{\mathbf{a}_3 \mathbf{b}_2}{\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_2}.$$

Ekkor tehát $\mathbf{b}_3 \in L(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ és $\mathbf{b}_3 \perp \mathbf{b}_1$; $\mathbf{b}_3 \perp \mathbf{b}_2$. Az eljárás ugyanígy folytatjuk, amíg $\mathbf{b}_k$-t is meghatározzuk.