2. Feladat:
Az ABC háromszög oldalát két, a másik oldalát három, a harmadik oldalát négy egyenlő részre osztottuk. Az osztópontok rendre: az AB oldalon a P, a BC oldalon Q_1 és Q_2, a CA oldalon R_1, R_2 és R_3. Tekintsük az összes olyan háromszöget, amelynek mindhárom csúcsa a különböző oldalon lévő osztópont. Melyik háromszögnek a legkisebb a területe?

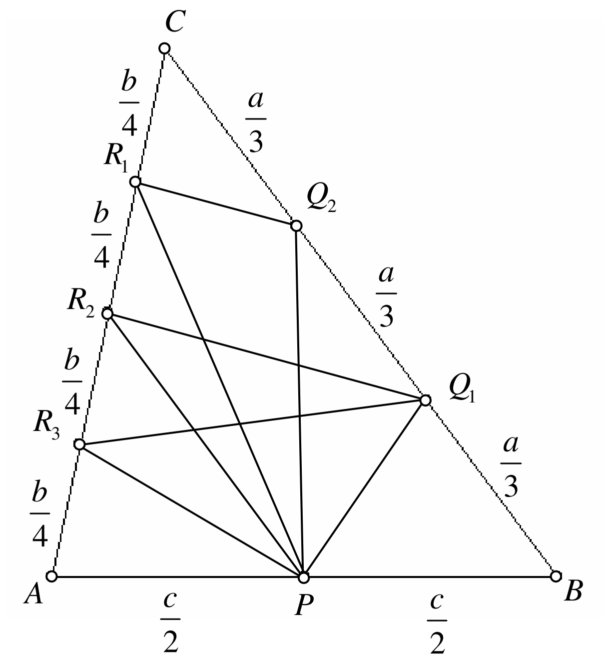
Megoldás:

Az ábrán látható pár lehetséges háromszög. A P csúcs biztos, hogy a keresett háromszög egyik csúcsa.
Ha berajzolunk egy megfelelő háromszöget, akkor ABC háromszögben négy háromszög keletkezik. Jelöljük T-vel a keresett háromszög területét.
Azon háromszög területe, amelynek egyik csúcs A:

$$T_1 = \frac{\frac{c}{2}\cdot n\cdot\frac{b}{4}\cdot\sin\alpha}{2};\ \text{ahol } n\in\{1;2;3\}$$

Azon háromszög területe, amelynek egyik csúcsa B:

$$T_2 = \frac{\frac{c}{2}\cdot m\cdot\frac{a}{3}\cdot\sin\beta}{2};\ \text{ahol } m\in\{1;2\}$$



Azon háromszög területe, amelynek egyik csúcsa C:

$$T_3 = \frac{(4-n)\cdot\frac{b}{4}\cdot(3-m)\cdot\frac{a}{3}\cdot\sin\gamma}{2}$$

Felírjuk a kérdéses háromszög területét:

$$T = T_{ABC} - (T_1+T_2+T_3) = T_{ABC} - \left(\frac{\frac{c}{2}\cdot n\cdot\frac{b}{4}\cdot\sin\alpha}{2} + \frac{\frac{c}{2}\cdot m\cdot\frac{a}{3}\cdot\sin\beta}{2} + \frac{(4-n)\cdot\frac{b}{4}\cdot(3-m)\cdot\frac{a}{3}\cdot\sin\gamma}{2}\right) =$$

$$= T_{ABC} - \left(\frac{b\cdot c\cdot\sin\alpha\cdot n}{16} + \frac{a\cdot c\cdot\sin\beta\cdot m}{12} + \frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma\cdot(4-n)\cdot(3-m)}{24}\right) =$$

$$= T_{ABC} - \left(\frac{b\cdot c\cdot\sin\alpha}{2}\cdot\frac{n}{8} + \frac{a\cdot c\cdot\sin\beta}{2}\cdot\frac{m}{6} + \frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2}\cdot\frac{(4-n)\cdot(3-m)}{12}\right)$$

Vegyük észre, hogy a szögfüggvényeket tartalmazó kifejezések mind az ABC háromszög területét adják:

$$T = T_{ABC} - \left(T_{ABC} \cdot \frac{n}{8} + T_{ABC} \cdot \frac{m}{6} + T_{ABC} \cdot \frac{(4-n)\cdot(3-m)}{12} \right) = T_{ABC} - T_{ABC} \cdot \left(\frac{n}{8} + \frac{m}{6} + \frac{(4-n)\cdot(3-m)}{12} \right) =$$
$$= T_{ABC} \cdot \left[1 - \left(\frac{n}{8} + \frac{m}{6} + \frac{(4-n)\cdot(3-m)}{12} \right) \right]$$

A keresett háromszög területére vonatkozó összefüggésből az ABC háromszög területe állandó. Emiatt ha T minimális, akkor $1 - \left(\frac{n}{8} + \frac{m}{6} + \frac{(4-n)\cdot(3-m)}{12} \right)$ minimális. Ez a kifejezés viszont akkor minimális, ha az 1-ből minél nagyobb számot veszünk el.

Keressük tehát az $\frac{n}{8} + \frac{m}{6} + \frac{(4-n)\cdot(3-m)}{12}$ kifejezés maximumát. Először átalakítjuk:

$$\frac{n}{8} + \frac{m}{6} + \frac{(4-n)\cdot(3-m)}{12} = \frac{n}{8} + \frac{m}{6} + \frac{12 - 4m - 3n + n\cdot m}{12} = \frac{\cancel{3n} + \cancel{4m} + 12 \cancel{-4m} \cancel{-3n} + n\cdot m}{24} =$$
$$= \frac{12 + n\cdot m}{24} = \frac{1}{2} + \frac{n\cdot m}{24}$$

A kapott kifejezésben $\frac{1}{2}$ állandó, emiatt $\frac{n\cdot m}{24}$-nek kell maximálisnak lennie. Figyelembe véve n és m lehetséges értékeit, ez $n = 3$ és $m = 2$ esetén teljesül.

Tehát ha $n = 3$ és $m = 2$, akkor a keresett háromszög területe minimális. $n = 3$ és $m = 2$ akkor igaz, ha a keresett háromszög másik két csúcsa Q_2 és R_3.

Vagyis: a feladat feltételeinek megfelelő háromszögek közül a $\underline{\underline{PQ_2R_3}}$ háromszögnek minimális a területe.