1. Feladat:
Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget, ha p pozitív prímszám!

$$\log_{\frac{p}{p+6-p^2}}\left(\frac{x^2}{2}-5\cdot x+13\right)\geq 1$$

Megoldás:

A logaritmus miatt kikötések megtételével kezdjük:

1. $\frac{x^2}{2}-5\cdot x+13>0$, vagyis $x^2-10x+26>0$. A függvény zérushelyei:

   $x_{1;2}=\frac{10\pm\sqrt{100-104}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{-4}}{2}$, vagyis a függvénynek nincs zérushelye $\Rightarrow x\in\mathbf{R}$.

2.

$$\frac{p}{p+6-p^2}\neq 1$$
$$p\neq p+6-p^2$$
$$0\neq -p^2+6$$
$$p^2\neq 6$$

   A kapott kikötés mindig igaz, mert ha p pozitív prímszám, négyzete nem lehet 6.

3.

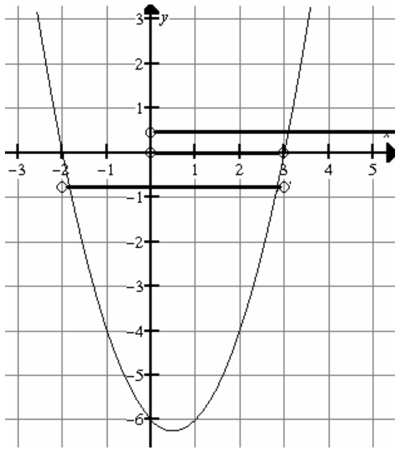
$$\frac{p}{p+6-p^2}>0$$

   Egy tört értéke akkor pozitív, ha a számláló és a nevező megegyező előjelű. Mivel p pozitív, ezért $p+6-p^2$ is pozitív:

$$p+6-p^2>0$$
$$-p^2+p+6>0$$
$$p^2-p-6<0$$

   Ez egy másodfokú egyenlőtlenség, zérushelyei:

$$p_{1;2}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}\begin{cases}p_1=-2\\ p_2=3\end{cases}$$



   Az egyenlőtlenség tehát akkor teljesül, ha $-2<p<3$, de figyelembe véve, hogy $0<p$, p-re teljesülnie kell, hogy:

$$0<p<3$$

   Mivel viszont a feladat szerint p pozitív prímszám, p értéke csak $\underline{p=2}$ lehet.

A p-re kapott kifejezést behelyettesítjük az eredeti egyenlőtlenségbe:

$$\log_{\frac{2}{2+6-4}}\left(\frac{x^2}{2}-5\cdot x+13\right)\geq 1$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{2}-5\cdot x+13\right)\geq 1$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{2}-5\cdot x+13\right)\geq \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$$

Az $f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ függvény szigorúan monoton csökkenő, emiatt:

$$\frac{x^2}{2}-5\cdot x+13\leq \frac{1}{2}$$

$$x^2-10\cdot x+26\leq 1$$

$$x^2-10\cdot x+25\leq 0$$

$$(x-5)^2\leq 0$$

Egy négyzetszám mindig nemnegatív, így a kapott egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha $x-5=0$, vagyis $\underline{x=5}$.

Összefoglalva: az egyenlőtlenség csak $\underline{\underline{p=2}}$ esetén értelmezhető, és ekkor $\underline{\underline{x=5}}$.

Mivel végig ekvivalens átalakításokat végeztünk, a kapott gyökök az eredeti egyenletnek is megoldásai.