## Tizedik heti gyakorlat

1. Írjuk fel a tiszta szinuszos Fourier sorát a $[0,2]$ intervallumon a következő függvénynek: $h(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < \pi \\ 0, & \text{ha } x = 0, \pi. \end{cases}$
   (Segítség: $h(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \cdots\right)$, ha $0 \le x \le \pi$.) NE használjuk az engedélyezett puskát!

2. Az engedélyezett puskát (lásd lent) használva adjuk meg a $G(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \le x \le 1; \\ 2-x, & \text{ha } 1 \le x \le 2. \end{cases}$ függvény tiszta-szinuszos Fourier sorát.

3. Az engedélyezett puskát (lásd lent) használva írjuk fel a tiszta szinuszos Fourier sorát a $[0,2]$ intervallumon a $\Phi(x) = x(2-x)$ függvénynek.

4. Az előző két feladat eredményeit használva oldjuk meg a következő problémákat:

   **(a)**
   $$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = 3.1^2 u_{xx}(x,t), & 0 < t, 0 < x < 2 \\ u(x,0) = \frac{1}{40}\left(1 - |x-1|\right), & 0 \le x \le 2 \\ u_t(x,0) = \frac{1}{80}x(2-x), & 0 < x < 2 \\ u(0,t) = 0,\ u(2,t) = 0, & 0 \le t \end{cases}.$$

   **(b)** Oldjuk meg a $\begin{cases} u_t = u_{xx}, & (0 < x < 2, 0 < t) \\ u(x,0) = f(x) \\ u(0,t) = u(2,t) \equiv 0 \end{cases}$ feladatot, ahol $f(x) = \begin{cases} x & \textit{ha } 0 \le x \le a \\ 2-x & \textit{ha } 1 \le x \le 2 \end{cases}$

5. A $[0,2]$ intervallumon fekszik egy húr, melynek kezdeti alakját az $f \equiv 0$ adja meg és a húr mozgását az $u_{tt} = u_{xx}$ írja le. Erre a húrra rávágunk egy kalapáccsal alulról felfelé egységnyi sebességgel és a kalapács feje a húrt a $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ szakaszon éri. Határozzuk meg a húr alakját a $t = 3.5$ időpontban a D'alambert módszerével. (Segítség: az általános képlet: $u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)\,d\tau$, ahol persze $f \equiv 0$ és a képlet $g$-jét mint az alábbi függvénynek a számegyenesre való páratlan kiterjesztését kapjuk:
   $x-> \begin{cases} 1, & \text{ha } |x-1| < \frac{1}{2}; \\ 0, & \text{ha } 0 < x < \frac{1}{2} \text{ vagy } \frac{3}{2} < x < 2\ . \end{cases}$ )

6. Tekintsünk egy végtelen hosszú húrt, amelyet négy ujjunkkal lefogunk a $(-1,0), (-\frac{1}{2},1), (\frac{1}{2},1), (1,0)$ pontokban, majd elengedjük. A húr mozgását a $u_{tt} = u_{xx}$ differenciálegyenlet írja le. Feladat: határozzuk meg a húr alakját a $t = 20$ időpontban! (Segítség: $u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g(\tau)\,d\tau$ )

### A vizsgán engedélyezett puskában ezek lesznek a differenciálegyenletekből:

1. Az $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ függvény tiszta szinuszos Fourier-sora: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right)$,
   ahol $b_n = \frac{2}{L} \cdot \int\limits_{t=0}^{L} f(t)\sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot t\right) dt$.

2. $\int x\sin(a \cdot x)dx = \frac{\sin(a\cdot x) - ax\cos(a\cdot x)}{a^2} + C$ továbbá: $\int x^2 \sin(a \cdot x)dx = -\frac{a^2x^2\cos(a\cdot x) - 2\cos(a\cdot x) - 2ax\sin(a\cdot x)}{a^3}$.

3. Rezgő húr: $\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & (0 < x < L, 0 < t) \\ u(t,0) = u(L,t) \equiv 0 & 0 < t \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < L \\ u_t(x,0) = g(x) & 0 < x < L \end{cases}$
   megoldása $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\left[A_k \cdot \cos\left(\frac{kc\pi}{L}t\right) + B_k \cdot \sin\left(\frac{kc\pi}{L}t\right)\right]$, ahol $\{A_k\}$ az $f(x)$ tiszta szinuszos Fourier együtthatói, $\alpha_k B_k$ pedig a $g(x)$ tiszta szinuszos Fourier együtthatói, ahol $\alpha_k = \frac{k\pi c}{L}$.

4. Hővezetés véges hosszú rúdban: $\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, & (0 < x < L, 0 < t) \\ u(t,0) = u(L,t) \equiv 0 & 0 < t \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < L \end{cases}$

Megoldás: $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha^2 t} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right)$, ahol $A_n$ az $f(x)$ függvény tiszta szinuszos Fourier sorának együtthatói.

5. Néhány függvény tiszta szinuszos Fourier sora a $[0, \pi]$ intervallumon:

(a) $0 \le x < \pi$, $f(x) = x$ függvényre: $f(x) = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \cdots\right)$, ha $0 \le x < \pi$.

(b) $g(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \le x \le \frac{\pi}{2}; \\ \pi - x, & \text{ha } \frac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$ $g(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{\sin(3x)}{3^2} + \frac{\sin(5x)}{5^2} - \frac{\sin(7x)}{7^2} + \cdots\right)$, ha $0 \le x \le \pi$.

(c) $h(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < \pi\ ; \\ 0, & \text{ha } x = 0, \pi. \end{cases}$ függvényre: $h(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \cdots\right)$, ha $0 \le x \le \pi$.

(d) $0 \le x \le \pi$, $\varphi(x) = x \cdot (\pi - x)$ függvényre: $\varphi(x) = \frac{8}{\pi}\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3^3} + \frac{\sin(5x)}{5^3} + \cdots\right)$, ha $0 \le x \le \pi$.