

æ

MAT. B4F feladatok az II. témakörhöz (építőmérnököknek)

(A Villamosmérnöki-, Közlekedésmérnöki Kar példatárai és egyéb feladatsorok alapján összeállította: Bolla Marianna)

1. Adott az (X, Y) 2-dimenziós vsz.v.v. eloszlása a következő együttes sűrűségfv.-nyel:

a.

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy, & \text{ha } 0 < x < 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

b.

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & \text{ha } (x, y) \in T, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

c.

$$f(x, y) = \begin{cases} 6(x - y), & \text{ha } (x, y) \in T, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

d.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{ha } (x, y) \in T, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

1. Győződjön meg arról, hogy valóban együttes sűrűségfv.-ről van szó! Gondolja meg, milyen értékpárok fordulhatnak elő!
2. Határozza meg az X és Y vsz.v. peremeloszlását. Független-e X és Y ?
3. $P(X > 1/2, Y < 1/2) = ?$ (az a.-beli eloszlásra)
4. $P(X > 1/2 | Y < 1/2) = ?$ (a b.-beli eloszlásra)
5. $P(X < Y) = ?$ (a c.-beli eloszlásra)
6. $P(X^2 + Y^2 < 1/4) = ?$ (a d.-beli eloszlásra)
7. Számolja ki az X és Y vsz.v. várható értékét és szórását, továbbá a két változó kovarianciáját és korrelációját!
8. Adja meg Y feltételes eloszlásának sűrűségfüggvényét az $X = x$ feltétel mellett! (amennyiben X és Y nem függetlenek)
9. Adja meg az Y -t X függvényével legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő regressziós görbe egyenletét! (amennyiben X és Y nem függetlenek)
10. Adja meg az Y -t X lineáris függvényével legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő regressziós egyenes egyenletét! (amennyiben X és Y nem korrelálatlanok)
11. Adja meg $X + Y$ eloszlását (akár az eloszlásfüggvény, akár a sűrűségfüggvény segítségével), és számítsa ki $X + Y$ várható értékét! (a b.-beli eloszlásra)
12. Adja meg XY eloszlását (akár az eloszlásfüggvény, akár a sűrűségfüggvény segítségével), és számítsa ki XY várható értékét! (az a.-beli eloszlásra)

13. Adja meg Y/X eloszlását (akár az eloszlásfüggvény, akár a sűrűségfüggvény segítségével), és számítsa ki Y/X várható értékét! (a c.-beli eloszlásra)
2. Adott az (X, Y) 2-dimenziós vsz.v.v. eloszlása a következő kontingenciatáblával:

1. Győződjön meg arról, hogy valóban együttes eloszlásról van szó. Gondolja meg, milyen értékpárok fordulhatnak elő!
2. Határozza meg az X és Y vsz.v. peremeloszlását. Független-e X és Y ?
3. $P(X = Y) = ?$ (az a.-beli eloszlásra)
4. $P(Y < 2|X = 0) = ?$ (a b.-beli eloszlásra)
5. $P(X < Y) = ?$ (a c.-beli eloszlásra)
6. $P(X^2 > Y^2) = ?$ (a d.-beli eloszlásra)
7. Számolja ki az X és Y vsz.v. várható értékét és szórását, továbbá a két változó kovarianciáját és korrelációját!
8. Adja meg Y feltételes eloszlását az $X = 1$ feltétel mellett! (a b.-beli eloszlásra)
9. Adja meg Y legkisebb négyzetes értelemben legjobb közelítését az $X = 0$ és $X = 1$ értékekre! (a b.-beli eloszlásra)
10. Adja meg az Y -t X lineáris függvényével legkisebb négyzetes értelemben legjobban közelítő regressziós egyenes egyenletét! (amennyiben X és Y nem korrelálatlanok)
11. Adja meg $X + Y$ eloszlását, és számítsa ki $X + Y$ várható értékét! (a b.-beli eloszlásra)
12. Adja meg XY eloszlását, és számítsa ki XY várható értékét! (az a.-beli eloszlásra)
13. Adja meg Y/X eloszlását, és számítsa ki Y/X várható értékét! (a c.-beli eloszlásra)

3. Egy urnában 5 piros, 10 fehér és 15 zöld golyó van jól összekeverve. Véletlenszerűen kivesszünk 9 db.-ot. Mi a valószínűsége, hogy a kivett golyók közt egyenlő számban lesz piros, fehér és zöld golyó? Feltéve, hogy a kivett 9 elemű mintában 4 zöld van, milyen lesz a piros és fehér golyók számának eloszlása? Visszatevés nélküli és visszatevéses mintavétellel is oldja meg a feladatot!
4. Egy egység hosszú botot véletlenszerűen 3 részre törünk. Mi a valószínűsége, hogy a kapott szakaszokból háromszög szerkeszthető?
5. A és B egymástól függetlenül választanak egy 0 és 3 közti számot véletlenszerűen. C összeadja, D pedig összeszorozza őket. Mi a valószínűsége, hogy a C által kapott szám 1-nél nagyobb? Mi a valószínűsége, hogy a D által kapott szám 1-nél kisebb?
6. Legyen $X \in \mathcal{E}(0, 1)$. Határozza meg $aX + b$ és X^2 eloszlását!
7. Legyen $X \in \mathcal{E}(-1, 1)$. Határozza meg $aX + b$ és X^2 eloszlását!
8. Legyen $X \in \mathcal{Exp}(2)$. Határozza meg $3X$ és X^2 eloszlását!
9. Határozza meg az $X \rightarrow Y$ transzformációt, ahol $X \in \mathcal{Exp}(3)$ és $Y \in \mathcal{B}_2(1/2)$!
10. Legyen $X \in \mathcal{B}_n(p)$ és $Y \in \mathcal{B}_m(p)$ független. Határozza meg $X + Y$ eloszlását!
11. Legyen $X \in \mathcal{P}(\lambda_1)$ és $Y \in \mathcal{P}(\lambda_2)$ független. Határozza meg $X + Y$ eloszlását!
12. Legyen $X \in \mathcal{G}(p)$ és $Y \in \mathcal{G}(p)$ független. Határozza meg $X + Y$ eloszlását!
13. Legyen $X \in \mathcal{Exp}(\lambda_1)$ és $Y \in \mathcal{Exp}(\lambda_2)$ független. Határozza meg $X + Y$ eloszlását!
14. Legyen $X \in \mathcal{Exp}(\lambda)$ és $Y \in \mathcal{E}(0, 1)$ független. Határozza meg $X + Y$ eloszlását!
15. Két szomszédos telefonfülkében egy férfi és egy nő beszélget. Beszélgetési idejük örökifjú tulajdonságú 5 ill. 10 perc várható értékkel. Addig várok, amíg felszabadul valamelyik fülke. Határozza meg a várakozási időm eloszlását! Mennyi ideig kell várhatóan várakoznom?
16. Két szomszédos telefonfülkében egy férfi és egy nő ismerősöm beszélget. Beszélgetési idejük örökifjú tulajdonságú 5 ill. 10 perc várható értékkel. Mindkettőjükre várok. Határozza meg a várakozási időm eloszlását! Mennyi ideig kell várhatóan várakoznom?
17. 10 kamion mindegyike egymástól függetlenül befut Bécsbe 0 és 1 óra közt egyenletes eloszlás szerint. Határozza meg az elsőként befutó várható érkezési idejét!
18. 10 kamion mindegyike egymástól függetlenül befut Bécsbe 0 és 1 óra közt egyenletes eloszlás szerint. Határozza meg az utolsónak befutó várható érkezési idejét!
19. Legyen X és Y független, standard normális eloszlású vsz. v.! Adja meg az $X + Y$, $X - Y$, $3X - 2Y$ változók eloszlását!
20. Legyen (X, Y) 2-dimenziós normális eloszlású vsz. v.v. az alábbi várható érték vektorral és kovarianciamátrixszal:

Adja meg az $X + Y$, $X - Y$, $3X - 2Y$ változók eloszlását!

21. Egy egyetemen 1000 számítógép van, de egy adott pillanatban átlagosan csak

minden negyedik kapcsolódik az Ethernet hálózatra. Az egyetemi hálózat túlterhelt lesz, ha egy adott pillanatban 270-nél több gép van rákapcsolva. Mi a valószínűsége, hogy egy adott pillanatban túlterhelés lesz? (Közelítse a kért valószínűséget a Φ függvény táblázata segítségével!)

22. Egy dobókockával 600-szor dobunk. Mi a vsz.-e, hogy a 6-os dobások száma 90 és 110 között lesz? Közelítse a kért valószínűséget a Φ függvény táblázata segítségével, és becsülje meg a Csebisev egyenlőtlenséggel is! Melyik a jobb?
23. 1000 szabályos pénzérmét kell feldobva mi annak a valószínűsége, hogy a fejek és írások számának eltérésem 20-nál kisebb? Közelítse a kért valószínűséget a Φ függvény táblázata segítségével, és becsülje meg a Csebisev egyenlőtlenséggel is! Melyik a jobb?
24. Egy közvéleménykutatás alkalmával legalább hány embert kell megkérdezni ahhoz, hogy egy politikai pártot támogatók aránya a valódi aránytól 90% valószínűséggel legfeljebb 0.01-dal térjen el?
25. Egy 1000 nézőt befogadó színháznak két bejárata van, mindegyikhez egy ruhatár tartozik. Legalább hány fogast kell egy ruhatárban elhelyezni, hogy legalább 99% legyen annak a valószínűsége, hogy mindenki abba a ruhatárba tudja beadni a kabátját, ahol bement? (A néző bármelyik bejáratot egyenlő valószínűséggel választhatja.)
26. Egy játékautomatán az előző játékoktól függetlenül – számunkra ismeretlen valószínűséggel – lehet nyerni. 100-szor játszottam az automatán. Milyen biztonsággal állíthatom, hogy 0.1 pontossággal ismerem a nyereség valószínűségét? Milyen biztonsággal állíthatom ugyanezt 1000 játszma után?