TDK 2011

Null-összegek véges Abel-csoportokban

Magyar András, Matematikus MSc I. évfolyam

Konzulens: Dr. Sándor Csaba, BME Sztochasztika Tanszék

1. Bevezetés, fogalmak

A kombinatorikus számelmélet kialakulásának egyik alapköve volt a következő egyszerű eredmény: „$2n-1$ darab egész számból mindig kiválasztható n darab úgy, hogy ezek összege osztható n-nel”. Az állítást 1961-ben bizonyította Erdős, Ginzburg és Ziv [1]. Ezt követően számtalan bizonyítás és általánosítás született.

Az egyik lehetséges általánosítási irány, hogy az állítást átfogalmazzuk véges ciklikus csoportokra: $\mathbb{Z}_n$ tetszőleges $2n-1$ eleméből mindig kiválasztható n darab úgy, hogy azok összege a csoport 0 elemét adja. Sőt, mivel a $2n-1$ korlát éles is, így a véges ciklikus csoportok mindegyikéhez egy $\mathrm{s}(\mathbb{Z}_n)$ konstanst rendelhetünk. Az általánosítás következő lépése, hogy ezt a konstanst tetszőleges G véges Abel-csoportra bevezetjük. Ehhez felhasználjuk a következő tényt.

1.1. Tétel. Minden G véges Abel-csoport egyértelműen írható föl az alábbi alakban:

$$G \cong \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_r}, \tag{1}$$

ahol $1 < n_1 \mid n_2 \mid \ldots \mid n_r$.

1.1. Definíció. A G (1)-beli felírásában n_r-t G exponensének ($\exp(G)$), r-t G rangjának ($\mathrm{rk}(G)$) nevezzük.

A továbbiakban legyen G egy véges Abel-csoport – melyben a művelet összeadás – és csoportokon is mindig Abel-csoportot értünk. Tetszőleges G-re ekkor $\mathrm{s}(G)$ legyen az a legkisebb egész, amilyen hosszú G-beli sorozatból kiválasztható $\exp(G)$ hosszúságú részsorozat, melynek összege a 0. (Ciklikus csoportokra ez éppen a korábbi definíció.)

Általános G-re $\mathrm{s}(G)$ közvetlen meghatározása reménytelenül nehéz feladatnak tűnik. Ám bevezetve csoportok további konstansait (melyek önálló vizsgálata is érdekes problémákat vet fel) vizsgálhatjuk az ezek között fennálló összefüggéseket.

1.2. Definíció. Legyen G tetszőleges,

- $\mathrm{D}(G)$ a G csoport Davenport-konstansa, az a legkisebb t egész, hogy minden G elemeiből álló legalább t hosszú sorozatban létezik null-összeg;
- $\eta(G)$ az a legkisebb egész, hogy minden G elemeiből álló legalább t hosszú sorozatban létezik *legfeljebb* exponens elemből álló null-összeg.

1.1. Lemma. Tetszőleges G-re

$$|G| \geq \eta(G) \geq \mathrm{D}(G). \tag{2}$$

A bevezetett konstansok között egy érdekes összefüggés áll fönn.

1.1. Állítás (Gao [5])**.** Legyen G tetszőleges csoport. Ekkor

$$\mathrm{s}(G) \geq \eta(G) \ + \ \exp(G) - 1. \tag{3}$$

Bizonyítás. Válasszunk G elemeiből $\eta(G)-1+\exp(G)-1$ darabot a következőképpen:

$$g_1, g_2, \ldots, g_{\eta(\mathrm{G})-1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\exp(G)-1}$$

ahol a $g_1, g_2, \ldots, g_{\eta(G)-1} (\neq 0)$ elemekből nem választható ki $\leq \exp(G)$ hosszú null-összeg. Viszont ezekhez 0-kat választva sem adódik újabb elem részösszegként. Csak 0-ból viszont nem áll rendelkezésre $\exp(G)$ darab, így ezekből sem tudunk kellően hosszú null-összeget kiválasztani. $\square$

Természetes kérdés, hogy (3)-ban mikor írható egyenlőség az egyenlőtlenség helyett. A kérdést elsőként W.D. GAO kínai matematikus vetette föl először a [4] cikkében.

1.1. Sejtés (Gao [4])**.** Minden G csoportra

$$\mathrm{s}(G) = \eta(G) \; + \; \exp(G) - 1. \tag{4}$$

Az 1.1. sejtésbeli egyenlőség teljes általánosságban (még) nem bizonyított. Ám speciális esetek alátámasztják a sejtést.

1.2. Tétel (Gao [5] [6])**.** G-re igaz az 1.1. sejtés, ha

- $\mathrm{rk}(G) \leq 2$;
- $\exp(G) \leq 4$.

Vezessük most be $\mathrm{s}_k(G), \eta_k(G)$ $(k \in \mathbb{N}^+)$ konstansokat az alábbi (természetes) módon.

1.3. Definíció. Legyen G tetszőleges,

- $\mathrm{s}_k(G)$ az a legkisebb t egész, amelyre minden legalább t hosszú G-beli elemekből álló sorozat tartalmaz pontosan $k \cdot \exp(G)$ elemből álló null-összeget;
- $\eta_k(G)$ pedig jelölje azt a legkisebb t egészt, amelyre minden legalább t hosszú G-beli elemekből álló sorozatból kiválasztható legfeljebb $k \cdot \exp(G)$ elem úgy, hogy ezek összege nulla;
- és legyen $\mathrm{s}_0(G)$ az a legkisebb t egész, amelyre egy G elemeiből álló legalább t hosszú sorozat tartalmaz olyan null-összeget, melyben a tagok száma osztható $\exp(G)$-vel.

Nyilvánvalóan $\mathrm{s}_1(G) = \mathrm{s}(G)$, $\eta_1(G) = \eta(G)$. Megjegyezzük, hogy η_k egy eddig az irodalomban elő nem forduló konstans, melynek szerepe számunkra az lesz, hogy a már eddig is bevezetett konstansok kapcsolatára feltett kérdést (1.1. sejtés) mi még általánosabban fogalmazhassuk meg, és vizsgálatainkat e kérdés köré szervezzük.

Az újonnan bevezetett konstansokra könnyen adódik egy (3) egyenlőtlenséggel analóg összefüggés.

1.3. Tétel. Tetszőleges G csoportra, minden $k \in \mathbb{N}$-re

$$\mathrm{s}_k(G) \geq \eta_k(G) \; + \; k \cdot \exp(G) - 1. \tag{5}$$

Bizonyítás. Hasonlóan: válasszunk egy $\eta_k(G)-1 \;+\; k\cdot\exp(G)-1$ hosszú sorozatot G elemeiből a következőképpen:

$$g_1, g_2, \ldots, g_{\eta_k(G)-1}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k\cdot\exp(G)-1}$$

ahol a $g_1, g_2, \ldots, g_{\eta_k(G)-1}(\neq 0)$ elemekből nem választható ki $\leq k\cdot\exp(G)$ hosszú null-összeg, viszont ezekhez 0-kat választva nem adódik újabb elem részösszegként. Csak 0-ból viszont nem áll rendelkezésre $k\cdot\exp$(G), így ezekből sem tudunk kellően hosszú null-összeget kiválasztani. □

Persze itt is felmerül a kérdés, hogy mikor teljesül (5) egyenlőéggel.

1.2. Sejtés. Tetszőleges G csoportra, minden $k \in \mathbb{N}$-re

$$\mathrm{s}_k(G) = \eta_k(G) \;+\; k\cdot\exp(G) - 1. \tag{6}$$

A dolgozatban a célunk az lesz, hogy sejtésünket is minél szélesebb körben igazoljuk. Belátjuk a következő tételeket:

A. Tétel (Magyar, 2011.)**.** Tetszőleges G csoport esetén (6) egyenlőség teljesül, amint $k \geq |G|/\exp(G)$.

Tehát azt mondhatjuk, hogy minden csoport esetén *majdnem minden* k esetén helyes a sejtésünk. Ezen túl igazolunk két – az 1.2. tétellel összhangban álló – tételt.

B. Tétel (Magyar, 2011.)**.** Tetszőleges G csoport esetén, ha $\mathrm{rk}(G) \leq 2$, akkor minden $k \in \mathbb{N}$ esetén teljesül (6).

C. Tétel (Magyar, 2011.)**.** Tetszőleges G csoport esetén, ha $\exp(G) \leq 4$ és $\mathrm{rk}(G) = 3$, akkor G-re teljesül (6) minden $k \in N$ esetén.

E három tétel után belátjuk még az alábbi állítást, melynek lényegi része a bizonyításokkor használt lineáris algebrai módszer.

D. Tétel (Magyar, 2011.)**.** Ha $G = \mathbb{Z}_2^4$ vagy $G = \mathbb{Z}_2^5$, akkor G csoportra is igaz (6) egyenlőség, tetszőleges pozitív, egész k-val.

A dolgozat végén pedig kapcsolatba hozzuk (6) egyenlőséget két korábbi sejtéssel, melyek közül az egyiket Gao [6], a másikat (mely magában foglalja az első sejtés állítását) Gao és Thangadurai vetették föl [10].

2. További jelölések, fontos segéderedmények

Legyen G egy tetszőleges csoport és S egy G elemeiből álló sorozat. Vezessük be az alábbi jelöléseket:

- $|S|$ legyen S elemeinek száma;
- $\sigma(S) = \sum_{s\in S} s$, azaz az S-beli elemek összege;

- $\mathrm{h}(S)$ jelölje az S-ben leggyakrabban előforduló elem előfordulási számát.

A sorozatok közötti relációkra, műveletekre (pl. részsorozat, metszet) legtöbbször a szokásos halmazelméleti jelöléseket alkalmazzuk (annak ellenére, hogy szigorú halmazelméleti értelemben e sorozatok nem halmazok, ezért például $S \cup T$ helyett néha egyszerűen csak ST-t írunk, ami azt jelenti, hogy ST egy olyan sorozat, amelyet T elemeinek S elemei után való írásával kaphatunk). A már meglévő jelöléseink mellé vezessük be a következö konstansokat.

2.1. Definíció. Legyen G tetszőleges. Jelölje $\mathrm{s}_{\mathrm{m}\bullet}(G)$ azt a legkisebb t egészt, ahány elemet G-ből kiválasztva a kiválasztott elemek tartalmaznak m-mel osztható hosszúságú 0-összeget.

2.1. Lemma. $\mathrm{s}_{\mathrm{m}\bullet}(G) \leq \mathrm{D}(G \oplus \mathbb{Z}_m)$.

Bizonyítás. Legyen S egy G-beli sorozat, amelyre $|S| = \mathrm{D}(G \oplus \mathbb{Z}_m)$. Vegyük S elemeinek a

$$\psi : G \hookrightarrow G \oplus \mathbb{Z}_m$$
$$\psi : s \mapsto s \oplus 1$$

homomorfizmus általi képét. Ekkor $\psi(S)$ tartalmaz egy nem üres 0-összeget, amelynek hossza (a második *koordináta* miatt) osztható m-mel. □

Ezzel a jelöléssel persze $\mathrm{s}_0(G) = \mathrm{s}_{\exp(\mathrm{G})\bullet}(G)$, de itt az egyszerűbb $\mathrm{s}_0(G)$ jelölést választjuk. Az eredmény főként p-csoportok vizsgálatakor lesz gyümölcsöző, mert a p-csoportok Davenport-konstansait ismerjük.

Megjegyzés. Legyen $G \cong \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_r}$, G (1) szerinti felírása. Ekkor

$$\mathrm{D}(G) \geq \sum_{i=1}^{r}(n_i - 1) + 1. \tag{7}$$

Következmény. Tetszőleges G esetén $\mathrm{D}(G) \geq \exp(G)$.

Az viszont ismert, hogy a megjegyzésben $\mathrm{D}(G)$ konstansra adott alsó becslés éles, ha G egy p-csoport, valamely p prímre.

2.1. Tétel (Olson [8]). Legyen G p-csoport, ahol p prím, azaz

$$G \cong \mathbb{Z}_{p^{r_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p^{r_s}}.$$

Ekkor $\mathrm{D(G)} = 1 + \sum_i (p^{r_i} - 1)$.

A következő eredményekre, észrevételekre az 5. fejezetben lesz szükségünk.

2.2. Lemma. Legyen S egy G-beli sorozat. Ekkor S pontosan akkor tartalmaz egy $k \cdot \exp(G)$ tagú 0-összeget, ha $\hat{S} = g + S$ tartalmaz egy $k \cdot \exp(G)$ tagú 0-összeget, ahol $g + S = \{s + g | s \in S\}$ alakú elemek sorozata. Sőt, ha $U \subset S$-re $\sigma(U) = 0$ és $|U| = k \cdot \exp(G)$ fennáll, akkor ugyanezek fennállnak $\hat{U}$-re.

Bizonyítás. Az állítas adódik abból, hogy $(k \cdot \exp(G)) \cdot g = \underbrace{g + g + \ldots + g}_{k \cdot \exp(G)} = 0$, mert G-ben minden elem rendje osztja az csoport exponensét. □

2.2. Tétel (Magyar, 2011.). Legyen G egy tetszőleges (véges Abel) csoport, legyen S G elemeiből álló $|S| \geq \eta_k(G) + k \cdot \exp(G) - 1$ hosszú sorozat. Ekkor, ha

$$\mathrm{h}(S) \geq k \cdot \exp(G) - \left\lfloor \frac{k \cdot \exp(G)}{2} \right\rfloor - 1,$$

akkor S-ben van $k \cdot \exp(G)$ hosszú 0-összeg.

A bizonyításhoz felhasználunk egy lemmát.

2.3. Lemma. Legyen $i \in \{1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{k \cdot \exp(G)}{2} \right\rfloor + 1\}$, S egy G elemeiből álló $|S| = \eta_k(G) + i - 1$ hosszú sorozat, ekkor S-ben létezik egy T 0-összeg, melynek hosszára $i \leq |T| \leq k \cdot \exp(G)$ teljesül.

A lemma bizonyítása. Indukcióval bizonyítunk. $i = 1$ esetén $|S| = \eta_k(G)$, az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy az állítás igaz, ha $1 \leq i \leq \left\lfloor \frac{k \cdot \exp(G)}{2} \right\rfloor$. Ekkor igaz $i+1$-re is, ugyanis legyen $|S| = \eta_k(G) + i + 1 - 1$. S-ben van egy T_1 0-összegű részsorozat, melynek hossza $i \leq |T_1| \leq k \cdot \exp(\mathrm{G})$. Ha $i + 1 \leq |T_1|$, akkor kész vagyunk, ellenkező esetben $|T_1| = i$. Ekkor $|S \setminus T_1| = \eta_k(G)$, így tartalmaz egy $\leq \eta_k(G)$ hosszú 0-összeget, legyen ez T_2. Ha $|T_2| \geq i + 1$, akkor kész vagyunk, ellenkező esetben $i + 1 \leq |T_1 \cup T_2| \leq 2i \leq k \cdot \exp(G)$. □

A tétel bizonyítása. Legyen $|S| \geq \eta_k(G) + k \cdot \exp(G) - 1$. Legyen továbbá $\mathrm{h}(S) \geq k \cdot \exp(G) - \left\lfloor \frac{k \cdot \exp(G)}{2} \right\rfloor - 1$. Ha $\mathrm{h}(S) \geq k \cdot \exp(G)$, akkor kész vagyunk, így feltesszük, hogy az ellenkező eset áll fenn. Feltehető az is, hogy S-ben a 0 a leggyakrabban előforduló elem, különben tekintsük $\hat{S} = -g + S$ sorozatot ahol g a leggyakrabban előforduló elem S-ben (2.2. lemma). S szerkezete így:

$$S = \underbrace{0, \ldots, 0}_{\mathrm{h}(S)} \cup S_1,$$

ahol $|S_1| = \eta_k(G) + k \cdot \exp(G) - 1 - \mathrm{h}(S)$ és $1 \leq (k \cdot \exp(G) - \mathrm{h}(S)) \leq \left\lfloor \frac{k \cdot \exp(G)}{2} \right\rfloor + 1$. Így S_1-re alkalmazva a lemmát, S_1 tartalmaz egy 0-összegű U sorozatot, melynek hosszára $(k \cdot \exp(G) - \mathrm{h}(S)) \leq |U| \leq k \cdot \exp(G)$ áll. U-t a $\mathrm{h}(S)$ db 0 elem közül megfelelő számúval uniózva $k \cdot \exp(G)$ hosszú 0-összeget kapunk. □

Következmény. Ha $\exp(G) \in \{1, 2, 3, 4\}$, akkor

$$\mathrm{s}(G) = \eta(G) + \exp(G) - 1.$$

Megjegyzés. A 2.2. lemma $k = 1$ speciális esete már ismert volt [5], viszont ez az általánosabb eredmény még nagyobb hasznunkra lesz csoportok konstansainak meghatározásakor, valamint egyszerű számolással adódik az alábbi

Következmény. Tetszőleges d esetén

$$\mathrm{s}_2(\mathbb{Z}_2^{\mathrm{d}}) = \eta_2(\mathbb{Z}_2^{\mathrm{d}}) + 2 \cdot \exp(\mathbb{Z}_2^{\mathrm{d}}) - 1.$$

A magasabb rangú csoportok tárgyalásakor, a már említett eredményből indulunk ki, azaz abból hogy minden csoport esetén elég nagy k indexre (6) teljesül, és a kimaradó kis k eseteket sorravesszük. Ám nem kell feltétlenül $|G|/\exp(G)$ darab esetet végignéznünk, ugyanis az alábbi induktív eljárásra támaszkodhatunk.

2.4. Lemma. Tegyük föl, hogy $\exists K \in \mathbb{N}$ úgy, hogy egy rögzített G-re $K \cdot \exp(G) \geq \mathrm{D}(G)$, valamint

$$\mathrm{s_K}(G) = \eta_\mathrm{K}(G) + K \cdot \exp(G) - 1$$

teljesül és emelett igaz a következő egyenlőtlenség is:

$$\mathrm{s}(G) \leq \mathrm{D}(G) + (K+1) \cdot \exp(G) - 1.$$

Ekkor $\forall k \geq K$-ra

$$\mathrm{s_k}(G) = \eta_\mathrm{k}(G) + k \cdot \exp(G) - 1$$

szintén teljesül.

Bizonyítás. k-ra vonatkozó indukcióval. (6) K-ra igaz. Tegyük föl, hogy $K \leq k$-ra is igaz. Ekkor

$$\mathrm{s_{k+1}(G)} \leq \eta_\mathrm{k+1}(\mathrm{G}) + (k+1) \cdot \exp(\mathrm{G}) - 1$$

is igaz, ugyanis $\eta_\mathrm{k+1}(\mathrm{G}) + (k+1) \cdot \exp(\mathrm{G}) - 1$ elemből biztosan kiválasztható $\exp(\mathrm{G})$ elemből álló, null-összegű részsorozat (ugyanis nyilván $\forall k: \ \eta_\mathrm{k+1}(\mathrm{G}) \geq \mathrm{D(G)}$) a lemma második feltétele miatt. Ezt az $\exp(\mathrm{G})$ darab elemet elhagyva a maradék

$$\underbrace{\eta_\mathrm{k+1}(\mathrm{G})}_{\mathrm{D(G)}} + k \cdot \exp(\mathrm{G}) - 1 = \underbrace{\eta_\mathrm{k}(\mathrm{G})}_{\mathrm{D(G)}} + k \cdot \exp(\mathrm{G}) - 1$$

elemből kiválasztható $k \cdot \exp(\mathrm{G})$-hosszú, null-összegű részsorozat az indukciós feltevés miatt. $\square$

Megjegyzés. A 2.4. lemma alapgondolatát megtartva az állítás átjátszható egy másik szituációra is. Létezzen most egy $K \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $k \leq K$-ra igaz (6). Továbbá legyen K olyan nagy, hogy $\eta_\mathrm{k}(G) = \mathrm{D}(G)$, ha $k \geq K$. (Ilyen K persze létezik, mert ha pl. $k \cdot \exp(G) \geq \mathrm{D}(G)$, akkor a konstansok definíciója alapján $\eta_\mathrm{k}(G) = \mathrm{D}(G), k \geq K$.) Tegyük még föl, hogy létezik olyan $k' < K$, amelyre egyrészt

$$\mathrm{s_{k'}}(G) \leq \mathrm{D}(G) + (K+1) \cdot \exp(G) - 1,$$

másrészt $\eta_{\mathrm{(K+1)-k'}}(G) = \mathrm{D}(G)$. Ekkor (6) igaz minden $k \in \mathbb{N}$-re.

Végül vezessük be az alábbi két konstanst, melyeket a következő fejezetben fogunk használni.

2.2. Definíció. Egy G csoport esetén jelölje

- $\mathrm{r}(G)$ azt a legkisebb t egészt, amire G elemeiből álló tetszőleges legalább t hosszú sorozat tartalmaz pontosan $|G|$ hosszú, null-összegű részsorozatot.
- $\mathrm{l}(G)$ az a legkisebb t egészt, melyre ha $k \geq t$, akkor

$$\mathrm{s_k(G)} = k \cdot \exp(G) + \mathrm{D}(G) - 1.$$

Az, hogy $\mathrm{l}(G)$ konstans minden G-re létezik (véges), a következő fejezet elején található két Gao-tól származó tétel következménye.

3. Az A. tétel bizonyítása

A nagy k értékekre vonatkozó állítás közvetlen következménye két önmagában is fontos tételnek. Ezek az eredmények szintén W.D. Gao nevéhez fűződnek.

3.1. Tétel (Gao [3])**.** Legyen G tetszőleges csoport. Ekkor

$$\mathrm{r}(G) = \mathrm{s}_{\frac{|\mathrm{G}|}{\exp(\mathrm{G})}}(G) = |G| + \mathrm{D}(G) - 1. \tag{8}$$

Megjegyezzük, hogy a tétel speciális esetként (amikor a csoport ciklikus) magábanfoglalja az Erdős-Ginzburg-Ziv-tételt.

3.2. Tétel (Gao [9])**.** Legyen G tetszőleges, ekkor

$$\mathrm{s}(G) \leq |G| + \exp(G) - 1.$$

Következmény. Összerakva (7) egyenlőtlenséget és a 3.2. tételt,

$$\mathrm{s}(G) \leq |G| + \mathrm{D}(G) - 1$$

adódik.

Következmény. Ha tetszőleges G-re $k \geq \frac{|G|}{\exp(G)}$, akkor teljesül (6).

Bizonyítás. Teljesülnek a 2.4. lemma feltételei $K = |G|/\exp(G)$ választással. Ugyanis az imént tett észrevétel szerint

$$\mathrm{s}(G) \leq |G| + \mathrm{D}(G) - 1 \leq \mathrm{D}(G) + \left(\frac{|G|}{\exp(G)} + 1\right) \cdot \exp(G) - 1.$$

□

Sőt ennél egy erősebb állítás is igaz.

3.1. Állítás. Ha $k \geq \mathrm{l}(G)$, akkor (6) igaz.

Bizonyítás. A definíció alapján $k \geq \mathrm{l}(G)$ azt jelenti, hogy

$$\mathrm{s}_\mathrm{k}(G) = k \cdot \exp(G) + \mathrm{D}(G) - 1$$

teljesül. Viszont $\mathrm{D}(G) \leq \eta_\mathrm{k}(G)$ minden k-ra teljesül a konstansok jelentése miatt. Így

$$\mathrm{s}_\mathrm{k}(G) = k \cdot \exp(G) + \mathrm{D}(G) - 1 \leq k \cdot \exp(G) + \eta_\mathrm{k}(G) - 1,$$

de azt az 1.3. tételben láttuk, hogy a fordított irányú egyenlőtlenség mindig teljesül.

□

Következmény. $\mathrm{l}(G) \leq \frac{|G|}{\exp(G)}$.

Gondolhatnánk, hogy egy csoport vizsgálata során célszerű lehet vizsgálni csak a $k \leq \mathrm{l}(G)$ eseteket. Azonban $\mathrm{l}(G)$-ről is keveset tudunk. Annyi ismert [5], hogy minden G-re teljesül, hogy

$$\frac{\mathrm{D}(G)}{\exp(G)} \leq \mathrm{l}(G) \leq \frac{|G|}{\exp(G)}, \tag{9}$$

azonban ennél több nem. Érdekesség, hogy amely csoportokra belátjuk az 1.2. Sejtés igazságát, ott azonnal megkapjuk $\mathrm{l}(G)$ pontos értéket, mégpedig ekkor

$$\mathrm{l}(G) = \left\lceil \frac{\mathrm{D}(G)}{\exp(G)} \right\rceil.$$

4. A B.tétel bizonyítása

Az előző fejezet végén elindított gondolatot továbbgördítve könnyen elintézhetők az 1-rangú (ciklikus) csoportok.

4.1. Tétel. Ha $\mathrm{rk}(G) = 1$, akkor minden k-ra teljesül (6).

Bizonyítás. Ebben az esetben (9)-t felhasználva könnyen megkaphatjuk, hogy

$$1 \leq \frac{\mathrm{D}(G)}{\exp(G)} \leq \mathrm{l}(G) \leq \frac{|G|}{\exp(G)} \leq 1,$$

tehát $\mathrm{l}(G) = 1$, az állítás a 3.1. állítás következménye. □

A 2-rangú csoportok esetén is kényelmes helyzetben vagyunk, ugyanis elegendő korábbi eredményeket felhasználni az állítás igazolásához. Ha $k = 1$, akkor az 1.2. tétel szerint teljesül (6). Ha $k \geq 2$, akkor pedig segítségünkre lesz a következő

4.2. Tétel (Gao, Geroldinger [6])**.** Legyen G tetszőleges 2-rangú csoport. Ekkor $\mathrm{l}(G) = 2$.

A 3.1. állítás miatt tehát (6) teljesül, amint $k \geq 2$.

5. A C. tétel bizonyítása

Az előző fejezetekben sejtésünket általánosan igazoltuk a *kis* rangú csoportokra. Ezt megtehettük, mert a csoportok egyszerű szerkezete miatt sok eredmény állt rendelkezésünkre. A dolgok bonyolódni látszanak, ha a csoport rangja legalább 3. Gondoljunk csak Erdős-Ginzburg-Ziv és Reiher tételeire: mindkét tétel valójában azt fogalmazza meg, hogy s(G) konstansra adható (triviális) kombinatorikus alsó becslés (5.1. lemma) éles az $\mathrm{rk(G)} \in \{1, 2\}$ esetben, de nem az az $\mathrm{rk(G)} \geq 3$ esetben.

5.1. Lemma. $\mathrm{s}(\mathbb{Z}_\mathrm{n}^\mathrm{d}) \geq 2^d(n-1) + 1$.

Bizonyítás. Tekintsük a $\mathbb{Z}_n^d$-beli olyan elemeket, melyek minden összetevője („koordinátája") vagy 0 vagy 1. Minden egyes ilyen elemből válasszunk $n-1$ darabot. Ekkor olyan $2^d(n-1)$ darabból álló sorozatot kapunk, melyből nem választható ki n hosszú, null-összegű részsorozat. □

Megjegyzés. A becslés éles, ha $d \leq 2$ vagy ha $n = 2^a$, valamely $a \in \mathbb{N}$-re.[2]

Viszont az is ismert, hogy ha a rang legalább három, akkor a kombinatorikus alsó becslés nem minden esetben éles. Tehát várható, hogy a rang növelésével az általunk vizsgált konstansokra vonatkozó kérdések is komplikálttá válnak. A dolgozat e részében a célunk az lesz, hogy azon három rangú csoportokra, melyek exponense 1,2,3 vagy 4, igazoljuk sejtésünket.

5.1. $\mathbb{Z}_2^3$

5.1. Tétel. Legyen $G = \mathbb{Z}_2^3$, ekkor $\mathrm{s}(G) = 9$ és $\mathrm{s}_2(G) = 7$.

Bizonyítás. $\mathrm{s}(G) \geq 9$ azonnal adódik az 5.1. lemma által adott kombinatorikus alsó becslésből. Viszont a másik irányú egyenlőtlenség is adódik, ha belegondolunk, hogy $\mathbb{Z}_2^3$-ben minden nemnulla elem rendje 2, így e csoportban egy kéttagú összeg pontosan akkor nulla, ha a két tag megegyezik. Mivel $|\mathbb{Z}_2^3| = 8$, így a skatulya-elv miatt 9 elem esetén már biztosan van olyan, amely legalább kétszer szerepel.

Az világos, hogy $\mathrm{s}_2(G) \geq 7$, az 1.3. tétel miatt, mert $\eta_2(G) = \mathrm{D}(G) = 4$, ugyanis $2 \cdot \exp(G) \geq \mathrm{D}(G)$.

Vegyünk tehát egy S $\mathbb{Z}_2^3$ elemeiből álló 7 elemű sorozatot. Ekkor a 2.1. lemma miatt $\mathrm{s}_{2\bullet}(G) \leq 5$, így $\exists T \subset S$, hogy $\sigma(T) = 0$ és $|T| \in \{2, 4\}$. Ha $|T| = 4$, kész vagyunk. Ha $|T| = 2$, akkor $S \setminus T$-re alkalmazva újra a lemmát, $S \setminus T$-ben létezik egy 2 vagy 4 hosszú, null-összegű T' részsorozat. Ha T' hossza 4, akkor kész vagyunk, ellenkező esetben TT' hossza 4 és $\sigma(TT') = 0$. □

Következmény. Mivel ismeretes, hogy $k = 1$ esetén, ha $\exp(G) \leq 4$, akkor igaz (6), így tudjuk, hogy $\eta(G) = 8$.

Másrészt a tételből, illetve a bizonyításban tett megjegyzésből következik az is, hogy $k = 2$ esetén is teljesül (6) $\mathbb{Z}_2^3$-re.

A nagyobb k eseteknél pedig alkalmazhatjuk a 2.4. lemmát $K = 2$ választással, így megkaptuk, hogy a sejtésünk igaz erre a csoportra.

Következmény. Ha $k \geq 2$, akkor $\mathrm{s_k}(\mathbb{Z}_2^3) = 2k + 3$.

Láthatjuk tehát, hogy $\mathbb{Z}_2^3$ csoport vizsgálata erősíti a sejtésünket. Ehhez önmagában persze a $k = 1$ esetet, nem is kellett volna külön tárgyalni. Célunk az volt, hogy így a sejtésünk igazságával együtt mellékeredményként sikerült a csoport konstansait teljes mértékben ($\forall k \in \mathbb{N}$-re) feltérképeznünk.

5.2. $\mathbb{Z}_3^3$

Lépjünk tovább $\mathbb{Z}_3^3$ csoportra. Rögtön megjegyezzük, hogy e csoport esetén $\mathrm{s}(G)$ nem egyezik meg a kombinatorikus alsó korláttal [7], így joggal várhatnánk, hogy esetleg itt sérül majd a sejtésünkben felvetett egyenlőség is valamely k-ra. Ám a helyzet az, hogy e csoportra is igazolható az állítás. Ehhez most is szükségünk lesz a konstansok konkrét értékére.

5.2. Tétel (Gao, Thangadurai [10])**.** Legyen $G = \mathbb{Z}_3^3$, ekkor

- $\mathrm{s}(G) = 19$;
- $\mathrm{s}_2(G) = 13$.
- $\mathrm{s}_4(G) = 18$.

Akárcsak az előző esetben az 5.2. tétel első állításából és a tényből, hogy a csoportra $k = 1$ esetén igaz (6), kapjuk, hogy $\eta(\mathbb{Z}_3^3) = 17$.

5.2. Lemma. $\eta_2(\mathbb{Z}_3^3) = 8$.

Bizonyítás. Az 1.3. tétel miatt elegendő belátni, hogy $\eta_2(\mathbb{Z}_3^3) \geq 8$, ugyanis s_2 már ismert. Ehhez tekintsük a következő hét elemű sorozatot:

$$S = \{(1,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,0,1),(1,1,1)\}.$$

S-ből nem választható ki legfeljebb 6 elemből álló, null-összegű részsorozat. □

Következmény. $\mathrm{s}_2(\mathbb{Z}_3^3) = \eta_2(\mathbb{Z}_3^3) + 2 \cdot \exp(\mathbb{Z}_3^3) - 1$.

5.3. Lemma. $\mathrm{D}(\mathbb{Z}_3^3) = 7$.

5.4. Lemma. $\mathrm{s}_3(\mathbb{Z}_3^3) = 15$.

Bizonyítás. A 2.1. lemma miatt $\mathrm{s}_{9\bullet}(\mathbb{Z}_3^3) \leq \mathrm{D}(\mathbb{Z}_3^3 \oplus \mathbb{Z}_9) = 15$. Így 15 elemből biztosan kiválasztható egy 9 elemű 0-összeg, tehát $\mathrm{s}_3(\mathbb{Z}_3^3) \leq 15$. A fordított egyenlőséget pedig az 1.3. tétel adja. (Mert ismert $\eta_\mathrm{k}(\mathbb{Z}_3^3) = \mathrm{D}(\mathbb{Z}_3^3) = 7$, ha $k \geq 3$.) □

Megjegyzés. $\mathrm{s}_3(G)$-ről azt az említést teszi [10], hogy $15 \leq \mathrm{s}_3(G) \leq 17$, ám a lemma bizonyításával ezt a nyitott kérdést is megválaszoltuk.

Következmény. $\mathrm{s}_3(\mathbb{Z}_3^3) = \eta_3(\mathbb{Z}_3^3) + 3 \cdot \exp(\mathbb{Z}_3^3) - 1$.

A $k = 4$ esetet is egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, a nagyobb k-k esetén pedig újra hivatkozhatunk a 2.4. lemmára, melynek feltételei teljesülnek $\mathbb{Z}_3^3$-re $K = 4$ választással.

Ahogy $\mathbb{Z}_2^3$-nél, most is gazdagodtunk egy mellékeredménnyel, sikerült feltérképezni a csoport összes számunkra fontos konstansát, ugyanis az egyenletekből azt kapjuk, hogy ha $k \geq 3$, akkor

$$\mathrm{s}_\mathrm{k}(\mathbb{Z}_3^3) = 3k + 6.$$

5.3. $\mathbb{Z}_2^2 \oplus \mathbb{Z}_4$

E csoport az eddigi eszközeinkkel könnyen kezelhető, annak ellenére, hogy a csoport szerkezete bonyolultabb.

5.5. Lemma. Legyen $G = \mathbb{Z}_2^2 \oplus \mathbb{Z}_4$.

- $\mathrm{D}(G) = 6$;
- $\mathrm{s}_0(G) \leq \mathrm{D}(G \oplus \mathbb{Z}_4) = 9$;
- $\eta_1(G) \leq 9$;
- $\eta_\mathrm{k}(G) = \mathrm{D(G)} = 6$, ha $k \geq 2$.

Bizonyítás. Az első állítás a 2.1. tétel következménye, a második közvelenül következik a 2.1. lemmából és a harmadik is ennek folyománya. Ugyanis a 2.1. lemma szerint egy 9 elemű sorozatban van 4-gyel osztható hosszúságú 0-összeg. Ha ez a hossz 8, akkor a 8-tagú 0-összeg $\mathrm{D}(G) = 6$ miatt felbomlik két újabb 0-összegre, melyek egyike legfeljebb 4-tagú.

A negyedik állítás pedig adódik abból, hogy ebben az esetben $k \cdot \exp(G) \geq \mathrm{D}(G)$. □

5.3. Tétel. Legyen $G = \mathbb{Z}_2^2 \oplus \mathbb{Z}_4$. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}$-re

$$\mathrm{s_k}(G) = \eta_\mathrm{k}(G) + k \cdot \exp(G) - 1.$$

Bizonyítás. A csoport exponense 4, tehát tudjuk, hogy $k = 1$ esetben teljesül (6), sőt Az 5.5. lemma 3. állítása miatt, tudjuk, hogy $\mathrm{s_1}(G) \leq 12$. Ha $k \geq 2$, akkor a jobb oldal

$$\mathrm{D}(G) + k \cdot \exp(G) - 1 = 6 + 4k - 1 = 4k + 5 \geq 13,$$

így, ha igazoljuk az egyenlőséget $k = 2$-re, akkor fennállnak a 2.4. lemma feltételei $K = 2$-vel. Tehát meg kell mutatni, hogy G tetszőleges 13 eleméből kiválasztható 8, amelyek összege 0. Legyen S egy G elemeiből álló $|S| = 13$ hosszú sorozat, az 5.5. lemma 2. állítása szerint $\mathrm{s_0}(G) \leq 9$, így S tetszőleges 9 eleméből kiválasztható egy 4 vagy 8-tagú T 0-összeg, ha $|T| = 8$, kész vagyunk, amennyiben $|T| = 4$, úgy $|S \setminus T| = 9$, és ezért tartalmaz egy 4 vagy 8 hosszú U 0-összeget. Ha a hossza 8 kész vagyunk, ellenkező esetben TU sorozat egy 8-tagú null-összeg. □

5.4. $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4^2$

Nagyon hasonlóan járunk el a másik csoportnál is. Ismerjük a $k = 1$ esetet, igazoljuk a $k = 2$ esetet a konstansok meghatározásával, majd alkalmazzuk a 2.4. lemmát $K = 2$ választással.

5.4. Tétel. Legyen $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4^2$. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}$-re

$$\mathrm{s_k}(\mathrm{G}) = \eta_\mathrm{k}(\mathrm{G}) + k \cdot \exp(\mathrm{G}) - 1.$$

Bizonyítás. Legyen $k = 2$. Ekkor $k \cdot \exp(G) = 8 = \mathrm{D}(G)$. (Tehát $k \geq 2$ esetén $\mathrm{D}(G) = \eta_\mathrm{k}(G)$.) Ekkor (6) egyenlet jobb oldala:

$$\eta_2(G) + 2 \cdot \exp(G) - 1 = 8 + 8 - 1 = 15.$$

Így meg kell mutatni, hogy $|S| = 15$ elemű S sorozatból kiválasztható 8 elem, amelyek összege 0. Viszont alkalmazva a 2.1. lemmát, $\mathrm{s}_{8\bullet}(G) = \mathrm{D}(G \oplus \mathbb{Z}_8)$, ami a 2.1. tétel miatt 15. Tehát 15 elemből kiválasztható egy 8-cal osztható hosszúságú (nem üres) 0-összegű részsorozat.

Ha $k \geq 3$, akkor

$$\eta_\mathrm{k}(\mathrm{G}) + k \cdot \exp(\mathrm{G}) - 1 = 8 + k \cdot 4 - 1 = 4k + 7 \geq 19.$$

Azaz elég lenne megmutatni, hogy $\mathrm{s_1}(G) \leq 19$. Ehhez egy algebrai eszközt használunk. Legyen S egy $|S| = 19$ elemű sorozat. Legyen

$$\phi : G \to \mathbb{Z}_2^3, \text{ hogy}$$

$$\phi((a, b, c)) = (a, 2 \cdot b, 2 \cdot c).$$

Ekkor $\ker \phi \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, $\mathrm{Im}\ \phi \cong \mathbb{Z}_2^3$. $\phi(S)$ tehát egy 19 elemű $\mathbb{Z}_2^3$-beli sorozat. Mivel $\mathrm{s_1}(\mathbb{Z}_2^3) = 9$, így $\phi(S)$ felbontható

$$\phi(S) = \phi(S_1) \ldots \phi(S_5) \phi(\hat{S})$$

alakban, ahol $\sigma(\phi(S_i)) = 0$ és $|\phi(S_i)| = 2$. Következésképp

$$\sigma(S_1), \ldots, \sigma(S_5)$$

egy $\ker\phi \cong \mathbb{Z}_2^2$-beli 5 elemű sorozat. Kihasználva, hogy $\mathrm{s}_1(\mathbb{Z}_2^2) = 5$, adódik, hogy $\sigma(S_1), \ldots, \sigma(S_5)$ sorozatból kiválasztható kettő $(\sigma(S_j)\sigma(S_k))$, melyek összege 0. Mivel minden S_i két elemű, így ez pontosan azt jelenti, hogy az eredeti sorozatban S_jS_k egy négyelemű 0-összeg (S-ben). □

5.5. $\mathbb{Z}_4^3$

5.5. Tétel. Legyen $G = \mathbb{Z}_4^3$. Ekkor

$$\mathrm{s}_2(\mathrm{G}) = \eta_2(\mathrm{G}) + 2 \cdot \exp(\mathrm{G}) - 1.$$

A tétel bizonyításánál az előző csoportoknál látott módszer szerint fogunk eljárni. Ismerjük $k = 1$ esetét, igazoljuk – a szükséges konstansok meghatározásával – a $k = 2, 3$ eseteket, végül $K = 3$ választással alkalmazzuk a 2.4. lemmát. Az egyes konstansok meghatározása e csoportnál már elég nehézkes, a teljes eszköztárunkat használjuk.

5.6. Lemma. $\mathrm{s}_{2\bullet}(G) \leq 11$, $\mathrm{s}_{4\bullet}(G) \leq 13$, ahol $\mathrm{s}_{\mathrm{m}\bullet}(G)$ a legkisebb egész, amely hosszú G-beli sorozatban biztosan van m-mel osztható hosszúságú 0-összeg.

Bizonyítás. A $G \oplus \mathbb{Z}_2$, illetve $G \oplus \mathbb{Z}_4$ csoportok Davenport-konstansai és a 2.1. lemma adja. □

5.7. Lemma.

$$\eta_2(G) \leq 11.$$

Bizonyítás. Legyen $S = \{s_\alpha\}_{\alpha=1}^{11}$, feltehető, hogy $0 \notin S$. Ekkor 5.6. lemma szerint $\mathrm{s}_{2\bullet}(G) \leq 11$, így S-ben biztosan van páros hosszú T 0-összeg. Ha a hossz ≤ 8, akkor kész vagyunk. Tegyük föl tehát, hogy $|T| = 10$ és $T = \{t_1, \ldots t_{10}\}$. Mivel $\mathrm{D}(G) = 10$, ezért ha T nem tartalmaz valódi részsorozatként 0-összeget, akkor minden $\hat{T} \subset T$ kilenc elemű részsorozat egy *additív generátora* $G \setminus \{0\}$-nak (azaz G tetszőleges nem nulla eleme előáll, mint néhány $\hat{T}$-beli elem összege), ugyanis, ha létezne egy g_0, ami nem állna elő ilyen alakban, akkor $\hat{T} \cup \{-g_0\}$ nem tartalmazna 0-összeget, ami ellentmond annak, hogy $\mathrm{D}(G) = 10$.

Tekintsük a következő elemek felírását:

$$\begin{aligned} s_{11} - t_1 &= \sum_{j \in J_1} t_j \\ s_{11} - t_2 &= \sum_{j \in J_2} t_j \\ &\vdots \\ s_{11} - t_{10} &= \sum_{j \in J_{10}} t_j, \end{aligned} \tag{10}$$

ahol $J_i \subset (\{1, \dots 10\} \setminus \{i\})$. Az világos, hogy minden J_i indexhalmazra feltehető, hogy $|J_i| \leq 1$ (és definíció szerint $|J_i|$=0 jelentse azt, hogy $s_{11} - t_i = 0$). Ugyanis, ha $|J_i| \geq 2$, akkor

$$\begin{aligned} s_{11} - t_i &= \sum_{j \in J_i} t_j \\ s_{11} + \sum_{l \in (\{1,\dots,10\} \setminus \{i\})} t_l &= \sum_{j \in J_i} t_j \\ s_{11} + \sum_{l \in (\{1,\dots,10\} \setminus (\{i\} \cup J_i))} t_l &= 0, \end{aligned}$$

ahol a harmadik sor bal oldalán lévő összegzés legfeljebb 7-tagú, így a bal oldalon egy legfeljebb 8-tagú 0-összeg szerepel.

Ha s_{11} páros (minden koordinátában), akkor kész vagyunk, ugyanis ekkor ha $s_{11} = t_s + t_r$, akkor $s_{11} + t_s + t_r = 0$, mert $s_{11} = -s_{11}$. Ezáltal feltehetjük, hogy (10) egyenletek közt nincs olyan, ahol $s_{11} - t_j = t_l$ és $t_j = t_l$ áll fenn.

Az eddigi észrevételek alapján megállapíthatjuk tehát, hogy akárhogy is választunk T-ből egy elemet, az vagy megegyezik s_{11}-gyel, vagy létezik hozzá egy másik T-beli elem, hogy s_{11} e két elem összege. Azaz

$$\begin{aligned} s_{11} &= t_1 + u_1 \\ &\vdots \\ s_{11} &= t_{10} + u_{10}, \end{aligned}$$

ahol $u_i \in T \cup \{0\}$. Ha létezik 5 páronként különböző $t_j \in T$ (esetleg átindexeléssel lehetnek ezek $\{t_1, \dots, t_5\}$), akkor

$$\begin{aligned} s_{11} &= t_1 + u_1 \\ &\vdots \\ s_{11} &= t_5 + u_5 \end{aligned}$$

egyenletek jobb oldalán lesz legalább három lényegesen különböző összeg a jobb oldalon. Választva három ilyen i indexet $s_{11} + \sum(t_i + u_i)$ egy legfeljebb 7 hosszú 0-összeg.

Feltehető tehát, hogy T pontosan 4-féle elemet tartalmaz (mert ha kevesebb különböző elem lenne, akkor biztosan lenne olyan, amely legalább négyszer szerepel és egy ilyen négyes összege 0) és ezek egyike sem szerepel háromnál többször, tehát $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$, hogy T_i csupa „konstans” sorozat és $T_i \cap T_j = \emptyset$, ha $i \neq j$. Ekkor T_i halmazok párbaállíthatóak aszerint, hogy egy-egy reprezentánsuk összege s_{11}-t adja (ha valamelyik T_i-ben s_{11}-gyel egyező elemek lennének, akkor ez a sorozat „önmagával” alkot párt, és egy másik T_j-nek sem juthatna pár, ami lehetetlen). A skatulya-elv miatt biztosan lesz olyan pár, amelynek mindkét tagja legalább két elemű. Ebből a párból kapunk egy legfeljebb 4 hosszú sorozatot, melynek összege $2 \cdot s_{11}$, a másik párból pedig egy további legfeljebb 2 hosszú sorozatot, melynek összege s_{11}. Ekkor ezek a sorozatok s_{11}-gyel kiegészítve egy < 8 hosszú 0-összeget adnak. □

Az 5.5. tétel bizonyítása. Az világos, hogy $\eta_2(G) \geq 11$, mert

$$\{\underbrace{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)}_{3-szor}, \dots, (1,1,1)\}$$

egy olyan 10 elemű sorozat, amely nem tartalmaz 10-nél rövidebb 0-összeget. Emiatt viszont tudjuk, hogy $\mathrm{s}_2(G) \geq 11 + 2 \cdot 4 - 1 = 18$. Elegendő tehát megmutatni, hogy G tetszőleges 18 elemében van 8-tagú 0-összeg.

Legyen S egy $|S| = 18$ elemű sorozat. Tegyük föl, hogy S tartalmaz egy $K_1 \subset S$ $|K_1| = 2$ elemű 0-összegű részsorozatot (ez megfelelő eltolással elérhető, ugyanis a 18 elem közül biztosan van kettő, amik összege *páros*). Ekkor $|S \setminus K_1| > 13$ így egy tetszőleges 13 elemű részsorozata tartalmaz 4-gyel osztható N_1 0-összeget, melyről feltehetjük, hogy vagy 4 vagy 12 elemű.

I., Ha $|N_1| = 12$, a lemma miatt N_1 tartalmaz egy páros sok tagból álló 0-összegű (valódi) K_2 részsorozatot, melynek hossza $2, 4$, vagy 6. Ha ez 4 vagy 6, akkor kész vagyunk, ugyanis előbbi esetben $N_1 \setminus K_2$ nyolc elemű, utóbbi esetben pedig $K_1 K_2$ 8 elemű 0-összeg. Feltehető tehát, hogy $|K_2| = 2$. Viszont $|S \setminus K_1 K_2| > 13$, így ez szintén létezik egy $N_2 \subset (S \setminus K_1 K_2)$, hogy N_2 0-összegű, és hossza osztható 4-gyel. Ha $|N_2| = 4$, akkor $|N_2 K_1 K_2| = 8$ és kész vagyunk. Ha pedig $|N_2| = 12$, akkor akárcsak N_1, N_2 is tartalmaz olyan valódi rész-0-összeget, melynek hossza $2, 4$, vagy 6. Utóbbi két esetben kész vagyunk. Az első esetben S felírható

$$S = \hat{S} K_1 K_2 K_3$$

alakban, ahol $|\hat{S}| = 12$ és $\sigma(K_i) = 0$. Legyen $K_1 = \{k_1, k_2\}$. Mivel $|\hat{S}| \geq 11$, így tartalmaz egy T 0-összeget, amelyre $|T| \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Az első 4 esetben kész vagyunk. Így feltehetjük, hogy $\hat{S}$ tetszőleges 11 elemű részsorozata tartalmaz 10 hosszú 0-összeget. Tekintsük a következő H_i sorozatokat:

$$H_1 = \hat{S} \cup \{k_1\}$$
$$H_2 = \hat{S} \cup \{k_2\}$$

H_i 13 elemű sorozat, így tartalmaz 4-gyel osztható hosszú Q_i 0-összeget, feltehetjük, hogy ez a hossz 12. Az világos, hogy $k_i \in Q_i$ feltehető, különben a korábbi gondolatmenettel Q_i tetszőleges 11 elemű $\hat{Q}_i$ részsorozata tartalmaz páros tagú 0-összeget, így Q_i biztosan tartalmaz $2, 4$ vagy 6 hosszú 0-összeget, egy ilyet kiegészítve K_1, K_2, K_3 sorozatok egy megfelelő uniójával 8-tagú 0-összeg kapható.

Tekintsük sorra $Q_i \setminus \{k_i\}$ sorozatokat. Ezek 11 eleműek és mind részsorozatai $\hat{S}$-nek, tehát mind tartalmaznak egy T_i 10 (vagy egy ≤ 8) hosszúságú 0-összeget, tegyük föl, hogy $|T_i| = 10$. Legyen $x_i = Q_i \setminus T_i\{k_i\}$. Így

$$x_1 + k_1 = 0$$
$$x_2 + k_2 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$x_1 + x_2 + \underbrace{(k_1 + k_2)}_{0} = 0.$$

Ha x_1 és x_2 különböző elemek, akkor

$$\sigma(\{x_1, x_2\} K_1 K_2 K_3\}) = 0 \text{ és } |\{x_1, x_2\} K_1 K_2 K_3\}| = 8.$$

Ha pedig azonosak, akkor $x_1 = k_1 = k_2$, és így létezik olyan elem S-ben, amely legalább háromszor fordul elő. Ekkor viszont

$$3 = \mathrm{h}(S) \geq 2 \cdot \exp(G) - \left\lfloor \frac{2 \cdot \exp(G)}{2} \right\rfloor - 1 = 8 - 4 - 1 = 3,$$

ami elegendő 2.2. tétel szerint.

II., Ha $|N_1| = 4$, hasonlóképpen járunk el. Ugyanis ekkor S felbontható úgy, hogy

$$S = \hat{S} N_1 K_1,$$

ahol $\hat{S}$ 12 elemű és a korábbi esethez hasonlóan feltehető, hogy tetszőleges 11 elemű részsorozata tartalmaz 10 elemű 0-összeget (az világos, hogy minden ilyen tartalmaz páros hosszú részsorozatot, melynek hossza ha nem 10, akkor esetleg kiegésítve K_1, N_1, K_1N_1 sorozatok valamelyikével 8-tagú 0-összeget kapunk). Legyen most is $K_1 = \{k_1, k_2\}$ és vizsgáljuk most is a következő sorozatokat:

$$W_1 = \hat{S} \cup \{k_1\}$$
$$W_2 = \hat{S} \cup \{k_2\}$$

Akárcsak az előző esetben $|W_i| = 13$, így feltehető, hogy tartalmaz Z_i 12 elemű 0-összeget, amelyről szintén feltehető, hogy tartalmazza k_i-t. Továbbá $Z_i \setminus \{k_i\} \subset W_i$ és $|Z_i \setminus \{k_i\}| = 11$, tehát feltehető, hogy tartalmaz 10 hosszú V_i 0-összeget. Ekkor, ha $y_i = Z_i \setminus (V_i \cup \{k_i\})$, akkor teljesül, hogy

$$\begin{aligned} y_1 + k_1 &= 0 \\ y_2 + k_2 &= 0 \\ &\Downarrow \\ y_1 + y_2 + \underbrace{(k_1 + k_2)}_{0} &= 0, \end{aligned}$$

ahol szintén ha y_1, y_2 különböző elemei S-nek, akkor $N_1K_1 \cup \{y_1, y_2\}$ egy 8-tagú 0-összeg, különben pedig $y_1 = k_1 = k_2$ legalább háromszor előforduló elem S-ben. □

5.1. Állítás.

$$\mathrm{s}_3(\mathrm{G}) = \eta_3(\mathrm{G}) + 3 \cdot \exp(\mathrm{G}) - 1. \tag{11}$$

Bizonyítás. Mivel $3 \cdot \exp(G) > \mathrm{D}(G)$, így ha $k \geq 3$, akkor $\eta_k(G) = \mathrm{D}(G) = 10$. Így elegendő most megmutatni, hogy 21 elemből biztosan kiválasztható 12, melyek összege 0. Legyen tehát S egy 21 elemű sorozat. $S = \{s_1, \ldots, s_{21}\}$.

Lemma. Ha S tartalmaz egy T $|T| = 4$ részsorozatot, hogy $\sigma(T) = 0$, akkor S tartalmaz 12-tagú 0-összeget.

A lemma bizonyítása: Mivel $\mathrm{s}_{4\bullet}(G) \leq 13$, így $S \setminus T$ tetszőleges 13 eleme tartalmaz $4, 8$ vagy 12-tagú U 0-összeget. Ha $|U| \in \{8, 12\}$, akkor kész vagyunk, ha pedig $|U| = 4$, akkor $S \setminus (TU)$ tartalmaz egy további $4, 8$ vagy 12-tagú V 0-összeget. Ekkor V, UV, TUV sorozatok egyike biztosan 12 elemű és 0-összegű. □

Tekintsük a következő φ homomorfizmust:

$$\begin{aligned} \varphi &: G \to \mathbb{Z}_2^3 \\ \varphi &: (g_1, g_2, g_3) \mapsto (2 \cdot g_1, 2 \cdot g_2, 2 \cdot g_3) \end{aligned} \tag{12}$$

Ekkor $\ker\varphi \cong \mathbb{Z}_2^3$ és $\mathrm{im}\varphi \cong \mathbb{Z}_2^3$. Ekkor mivel $\mathrm{s}_1(\mathbb{Z}_2^3) = 9$, így $\varphi(S)$ elemei között biztosan lesz 7 olyan pár, amelyek összege 0. Azaz

$$\exists K_1, \ldots, K_7 \subset S: \text{ hogy } K_i = \{k_i^{(1)}, k_i^{(2)}\} \text{ és } \varphi(k_i^{(1)} + k_i^{(2)}) = 0.$$

A maradék 7 $\varphi(S)$ beli elem között pedig van egy 4-tagú 0-összeg, mert $\mathrm{s}_2(\mathbb{Z}_2^3) = 7$, jelölje ezt N. Azaz

$$\{\sigma(K_1), \dots, \sigma(K_7), \sigma(N)\} \in \ker \varphi.$$

Feltehető (alkalmas eltolással elérhető), hogy $\sigma(K_1) = 0$ (a 2.2. lemma miatt). Továbbá feltehető, hogy $\{\sigma(K_2), \dots, \sigma(K_7)\}$ tartalmaz olyan $\{\sigma(\hat{K}_2), \dots, \sigma(\hat{K}_5)\}$ négy elemű részsorozatot, amely összege nem 0. Ha nem tartalmazna, akkor az adódna, hogy $\sigma(K_i) = \sigma(K_j)$ minden $i, j = 2, \dots, 7$ és ekkor $\sum_{i=2}^{7} \sigma(K_i) = 0$ éppen egy 12 elemű 0-összeg S-ben.

Tekintsük az $M = \{\sigma(\hat{K}_2), \dots, \sigma(\hat{K}_5), \sigma(N)\}$ sorozatot. Mivel ez a sorozat 5 elemű, és $\mathrm{s}_0(\mathbb{Z}_2^3) \leq 5$, így M tartalmaz páros hosszú 0-összeget. Ha ez $\{\sigma(\hat{K}_j), \sigma(\hat{K}_l)\}$, valamely k, l indexekre, akkor ($\mathbb{Z}_4^3$-ban) az általuk meghatározott sorozat egy 4-tagú 0-összeget ad (azaz $\sigma(\hat{K}_j) + \sigma(\hat{K}_l) = 0$) és hivatkozhatunk a lemmára. Ha a páros 0-összeg a következő alakú: $\{\sigma(N), \sigma(\hat{K}_j), \sigma(\hat{K}_l), \sigma(\hat{K}_m)\}$, akkor ezt pedig kiegészítve $\sigma(K_1)$ kéttagú 0-összeggel, egy 12 elemű 0-összeg adódik ($\sigma(N) + \sigma(\hat{K}_j) + \sigma(\hat{K}_l) + \sigma(\hat{K}_m) + \sigma(K_1) = 0$). Egy esetet kell még vizsgálnunk, amikor is $\{\sigma(N), \sigma(\hat{K}_j)\}$ egy 0-összegű sorozat.

Ebben az esetben a $\{\sigma(K_2), \dots, \sigma(K_7)\} \setminus \{\sigma(\hat{K}_j)\}$ sorozatról szintén feltehető, hogy tartalmaz egy nem 0-összegű 4 elemű részsorozatot. (Különben a sorozat „konstans" sorozat lenne, és így tetszőleges két eleme egy 4 hosszú 0-összeget határozna meg.) Legyen ez $\{\sigma(\tilde{K}_2), \dots, \sigma(\tilde{K}_5)\}$. E sorozat tartalmaz nem-üres 0-összeget, mivel $\mathrm{D}(\mathbb{Z}_2^3) = 4$. Ha ennek hossza 1, azaz $\sigma(\tilde{K}_j) = 0$, akkor $K_1\tilde{K}_j$ egy 4-tagú 0-összege S-nek. Ha a hossz 2, akkor ez egy 4-tagú 0-összeget ad meg ($\mathbb{Z}_4^3$-ben), és hivatkozhatunk ismét a lemmánkra. Amennyiben pedig az 0-összeg hossza 3, úgy $\{\sigma(\tilde{K}_j), \sigma(\tilde{K}_l), \sigma(\tilde{K}_m), \sigma(\hat{K}_j), \sigma(N)\}$ elemei egy 12 elemű 0-összeget adnak. □

5.2. Állítás.

$$\mathrm{s_k}(\mathrm{G}) = \eta_{\mathrm{k}}(\mathrm{G}) + k \cdot \exp(\mathrm{G}) - 1, \; k \geq 4. \tag{13}$$

Bizonyítás. Mivel (13) bal oldala $k \geq 4$ esetben legalább 25, és kihasználva, hogy $\mathrm{s}_1(G) = 25$ (az 5.1. lemma után tett megjegyzés alapján), így teljesülnek a 2.4. lemma feltételei $K = 3$ választással. □

A három állítás adja az 5.5. tétel igazságát.

6. A D. tétel bizonyítása

A továbbiakban igazoljuk sejtésünk igazságát két további 2-csoportra, mégpedig $\mathbb{Z}_2^4$-re és $\mathbb{Z}_2^5$-re. A bizonyítások hasonlóan végezhetőek el, mint eddig: $k = 1, 2$ eset közvetlen következménye 2.2. tételnek, néhány *kis* k-ra meghatározzuk a konstansokat, majd a nagyobb k-ra a a 2.4. lemmában (ill. a lemma után tett megjegyzésünkben) vázolt induktív technikát alkalmazzuk. Ami viszont eltérés, az az, hogy a csoportok egyes konstansait, most lineáris algebrai megfontolásokkal határozzuk meg, mivel a két csoport tekinthető a kételemű test fölötti vektortérnek is. Vizsgálatainkat egy nagyon egyszerű észrevétellel kezdjük.

6.1. Lemma. A két csoportban egy kéttagú összeg pontosan akkor 0, ha a két tag megegyezik.

Másképp mondva, minden elem önmaga (additív) inverze.

6.1. $\mathbb{Z}_2^4$

6.1. Tétel. Legyen $G = \mathbb{Z}_2^4$. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}$-re

$$\mathrm{s_k(G)} = \eta_\mathrm{k}(\mathrm{G}) + k \cdot \exp(\mathrm{G}) - 1.$$

Bizonyítás. Ahogy mondtuk $k = 1, 2$ esetek már bizonyítottak. Sőt mindkét esetben megkereshetjük a konstansok konkrét értékét. Ha $k = 1$, akkor hivatkozunk az 5.1. lemma után tett megjegyzésünkre, mi szerint e csoport esetén $\mathrm{s}_1(G)$-re adott triviális alsó becslés éles.

$k = 2$ esetén $\eta_2(G)$ meghatározásával kaphatjuk meg a konstansokat.

Lemma. $\eta_2(G) = 6$.

A lemma bizonyítása. Azt, hogy $\eta_2(G) \geq 6$ a következő sorozat mutatja:

$$S = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (1,1,1,1)\},$$

melyben nincs legfeljebb 4 hosszú 0-összeg.

Legyen most S tetszőleges $|S| = 6$ elemű sorozat. A 2.1. lemma szerint tudjuk, hogy $\mathrm{s}_0(G) = \mathrm{D}(\mathbb{Z}_2^5) = 6$, tehát S biztosan tartalmaz egy T részsorozatot, amelyre $\sigma(T) = 0$ és $2 \mid |T|$. Ha $|T| \neq 6$, akkor kész vagyunk, ha pedig $|T| = 6$, úgy mivel $\mathrm{D}(G) = 5$, T felbomlik két további 0-összegre, melyek közül az egyik hossza biztosan kisebb, mint 4. Azt kaptuk tehát, hogy tetszőleges 6 elemű sorozat mindig tartalmaz egy legfeljebb 4 hosszú 0-összegű részsorozatot, tehát $\eta_2(G) \leq 6$. □

Legyen $k = 3$, ekkor $k \cdot \exp(G) = 6 \geq \mathrm{D}(G) = 5$, így ha $k \geq 3$, akkor $\eta_\mathrm{k}(G) = \mathrm{D}(G) = 5$. Tehát azt kell belátnunk, hogy ha S egy $|S| = 5 + 3 \cdot 2 - 1 = 10$ elemű sorozat, akkor biztosan tartalmaz egy hattagú, 0-összegű részsorozatot. A 2.2. lemma miatt feltehetjük, hogy $0 \in S$, ha nem így lenne, akkor egy tetszőleges $g \in S$ elemmel eltolva S-t, vizsgálhatjuk $\hat{S} = g + S$ sorozatot.

Feltehető továbbá az is, hogy létezik egy $B \subset S$, hogy $B = \{0, b_1, b_2, b_3, b_4\}$, ahol $\{b_i\}_{i=1}^4$ $\mathbb{Z}_2^4$ egy bázisát adja. Ha nem lenne ilyen részsorozat, akkor S minden eleme a tér egyik három (vagy esetleg annál még alacsonyabb) dimenziós alterébe esne, de láttuk, hogy $\mathrm{s}_3(\mathbb{Z}_2^3) = 9$, így S-ben találhatunk 6-tagú 0-összeget.

Most vizsgáljuk azt, hogy S további öt $T = S \setminus B$-beli eleme miként írható föl a báziselemek lineáris kombinációjaként (azaz hány bázis elem összegeként állnak elő). Ha valamely $t \in T$-re $t = b_k$, akkor

$$2 = \mathrm{h}(S) \geq 3 \cdot \exp(G) - \left\lfloor \frac{3 \cdot \exp(G)}{2} \right\rfloor - 1 = 6 - 3 - 1 = 2,$$

így a 2.2. tétel miatt kész vagyunk. Ha valamely $t \in T$-re pedig $t = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$, akkor

$$t + \sum_{i=1}^{4} b_i + 0$$

egy hattagú 0-összeg. Tehát feltehető, hogy T minden eleme vagy 2 vagy 3 bázis elem összegeként írható föl.

Ha $t_1, t_2 \in T$ két báziselem összegeként áll elő, akkor feltehető, hogy előállításukban van közös báziselem, ellenkező esetben ugyanis

$$\underbrace{t_1 + t_2}_{=b_1+b_2+b_3+b_4} + \sum_{i=1}^{4} b_i$$

egy hattagú 0-összeg. Emiatt feltehetjük azt is, hogy nincs T-ben négy olyan elem, amely két bázis elem összegeként áll elő, mert ekkor lenne vagy két megegyező, vagy két olyan, amelyek felírásában nincs közös báziselem.

Tegyük föl, hogy T elemei olyanok, hogy t_1, t_2, t_3 előáll két báziselem összegeként és t_4, t_5 előáll három báziselem összegeként. Az előző észrevétel alapján feltehetjük, hogy t_1, t_2, t_3 előállításában az egyik báziselem nem vesz részt (legyen ez b_4). Viszont t_4 és t_5 elem közül legalább az egyik előállításában szerepel b_4 – különben a $t_4 = t_5$ és kész vagyunk –, jelölje ezt t_5. Feltehető (esetleg átindexeléssel elérhető), hogy $t_1 = b_1 + b_2$, $t_2 = b_2 + b_3$ és $t_3 = b_1 + b_3$. Ekkor t_5 előállítása lényegében csak kétféle lehet aszerint, hogy tartalmazza-e b_2-t. Ha igen, akkor feltehető, hogy $t_5 = b_2 + b_3 + b_4$ viszont ekkor

$$\underbrace{t_1 + t_2 + t_5}_{=b_1+b_2+b_4} + b_1 + b_2 + b_4$$

egy hattagú 0-összeg. Ellenkező esetben feltehetjük, hogy $t_5 = b_1 + b_3 + b_4$, ekkor pedig

$$\underbrace{t_1 + t_5}_{=b_2+b_3+b_4} + b_2 + b_3 + b_4 + 0$$

egy hattagú 0-összeg.

Tegyük most föl, hogy T-ben t_1, t_2 előáll két, t_3, t_4, t_5 pedig három báziselem összegeként. Feltesszük, hogy $t_1 = b_1 + b_2$ és $t_2 = b_2 + b_3$. Ekkor ha t_3, t_4, t_5 páronként különböző, akkor biztosan lesz köztük egy olyan t_j, amely előáll $t_j = b_4 + b_1 + b_2$ vagy $t_j = b_4 + b_2 + b_3$ alakban. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az első eset áll fönn, ekkor

$$\underbrace{t_1 + t_2 + t_j}_{=b_2+b_4+b_3} + b_2 + b_3 + b_4$$

ismét egy hattagú 0-összeg.

Az utolsó eset, az amikor T-ben létezik egy t_5 elem, amely kettő, és négy $t_1, \ldots, t_4$ elem, amelyek három báziselem összegeként írhatók föl, ugyanis feltettük, hogy nincs két azonos eleme T-nek, így T-ben nem lehet 5 olyan elem, amelyek mindegyike három báziselem összegeként áll elő. Sőt emiatt az is igaz, hogy ha $j \leq 4$, akkor t_j felírható

$$t_j = \sum_{i \in (\{1,2,3,4\} \setminus \{j\})} b_i$$

alakban. Legyen $t_5 = b_1 + b_2$. Ekkor

$$\underbrace{t_5 + t_2 + t_3}_{=b_1+b_3} + b_1 + b_3 + 0$$

egy hattagú 0-összeg.

A $k = 4$ esetben kihasználjuk, hogy a 2.1. lemma miatt $\mathrm{s}_{8\bullet}(G) = \mathrm{D}(G \oplus \mathbb{Z}_8) = 12$. Így G tetszőleges 12 eleme tartalmaz egy (nem üres) 8-cal osztható hosszúságú 0-összeget.

A $k \geq 5$ esetben hivatkozunk a 2.4. lemma után tett megjegyzésünkre, mert a megjegyzésbeli feltételek teljesülnek $K = 4$ és $k' = 2$ választásokkal, hiszen $\mathrm{s}_2(G) = 9$. $\square$

6.2. $\mathbb{Z}_2^5$

Nagyon hasonló ötletekkel bizonyíthatjuk $\mathbb{Z}_2^5$ csoport esetét is.

6.2. Tétel. Legyen $G = \mathbb{Z}_2^5$. Ekkor minden $k \in \mathbb{N}$-re

$$\mathrm{s_k(G)} = \eta_{\mathrm{k}}(\mathrm{G}) + k \cdot \exp(\mathrm{G}) - 1.$$

Bizonyítás. A $k = 1, 2$ esetek már bizonyítottak a 2.2. tétel következményeként. Ám most is meghatározzuk az egyes konstansok értékét. A $k = 1$ esetet az előző esethez hasonlóan tárgyaljuk, mert most is éles az 5.1. lemmában adott alsó korlát $\mathrm{s}_1(G)$-re.

A $k = 2$ esetben meghatározzuk $\eta_2(G)$ értékét.

Lemma. $\eta_2(G) = 7$.

Bizonyítás. Azt, hogy $\eta_2(G) \geq 7$ ismét egy jól megválasztott sorozat mutatja. Legyen S az alábbi

$$S = \{(0,0,0,0,1),(0,0,0,1,0),(0,0,1,0,0),(0,1,0,0,0),(1,0,0,0,0),(1,1,1,1,1)\}$$

sorozat, könnyen ellenőrizhető, hogy S nem tartalmaz legfeljebb 4 hosszúságú 0-összeget.

Legyen most S egy $|S| = 7$ elemből álló sorozat. Feltehetjük, hogy S tartalmaz öt lineárisan független elemet, különben S minden eleme egy G egy legfeljebb 4-dimenziós alterébe esik, azonban az előbb láttuk, hogy $\eta_2(\mathbb{Z}_2^4) = 6$.

Legyen tehát az öt független elem $B = \{b_1, \ldots, b_5\}$. A maradét két eleme S-nek felírható, mint néhány különböző b_i összege. Ha egy $s \in S \setminus B$ felírható kevesebb, mint négy B-beli elem összege, akkor ezek a B-beli elemek s-sel egy legfeljebb 4-tagú 0-összeget adnak.

Ha pedig $s_1, s_2 \in S \setminus B$ is legalább 4 B-beli elem összegeként írható föl, akkor $s_1 + s_2$ előállítható legfeljebb két B-beli összegeként, azaz

$$\begin{aligned} s_1 + s_2 &= \sum_{i \in I_i} b_i, \text{ ahol } |I_i| \leq 2, \\ \Rightarrow 0 &= \underbrace{\sum_{i \in I_i} b_i + s_1 + s_2}_{\text{legfeljebb 4-tagú}}. \end{aligned}$$

□

Ha $k \geq 3$, akkor pedig megint igaz, hogy $k \cdot \exp(G) \geq \mathrm{D}(G) = 6$ (valójában „="), így $\eta_{\mathrm{k}}(G) = \mathrm{D}(G)$ ezekben az esetekben. Tekintsük $k = 3$ esetet. Legyen S egy $|S| = 6 + 3 \cdot 2 - 1 = 11$ elemű sorozat. Feltehető, hogy minden elem különböző, ugyanis ellenkező esetben

$$2 = \mathrm{h}(S) \geq 3 \cdot \exp(G) - \left\lfloor \frac{3 \cdot \exp(G)}{2} \right\rfloor - 1 = 2,$$

így a 2.2. tétel miatt kész vagyunk.

Feltehető, hogy $0 \in S$, továbbá az is, hogy S tartalmaz egy 5 elemű (lineárisan) független rendszert, ugyanis ellenkező esetben S minden eleme egy $\mathbb{Z}_2^4$-gyel izomorf altérbe esne (vagy esetleg ennek egy valódi alterébe), és $\mathbb{Z}_2^4$-re ismert, hogy tetszőleges 11 eleméből biztosan kiválasztható 6, melyek összege 0. (Mert ahogy az imént láttuk, $\mathrm{s}_3(\mathbb{Z}_2^4) = 10$.) Tudjuk még azt is, hogy S tetszőleges eleme felírható az öt független elem ($\{b_1, \dots, b_5\}$) lineáris kombinációjaként, és mivel az alaptest $\mathbb{Z}_2$, így S minden eleme egyértelműen felírható

$$s_j = \sum_{i \in I_j \subset \{1,\dots,5\}} b_i \tag{14}$$

alakban.

Vizsgáljuk meg, hogy a $\hat{S} = S \setminus \{b_1, \dots, b_5, 0\}$ maradék 5 eleme, hogy állhat elő (14) alakban. Természetesen, ha $|I_j| = 1$, akkor $\mathrm{h}(S) \geq 2$, ha pedig valamely $s_j \in \hat{S}$-re $|I_j| = 4$, akkor

$$s_j + 0 + \sum_{i \in I_j} b_i$$

hattagú 0-összeg, végül pedig ha $|I_j| = 5$, akkor

$$s_j + \sum_{i \in I_j} b_i = 0$$

szintén 6-tagú 0-összeg. Feltehető tehát, hogy $\hat{S}$-ben minden s_j elemre, a (14) általi felírásban $|I_j| \in \{2, 3\}$.

Jelölje $N_2(\hat{S})$ azon s_j elemek számát $\hat{S}$-ben, melyek (14) alatti előállításban $|I_j| = 2$, és analóg módon vezessük be $N_3(\hat{S})$ jelölést.

Célunk megmutatni, hogy ha $N_2(\hat{S}) > 3$, vagy $N_3(\hat{S}) > 4$, akkor S-ben van 6 hosszú 0-összeg. Valamint azt, hogy ha $N_2(\hat{S}) \geq 3$ és $N_3(\hat{S}) > 1$, vagy $N_3(\hat{S}) \geq 3$ és $N_2(\hat{S}) \geq 1$, akkor S-ben van 6-hosszú 0-összeg.

Tegyük föl, hogy $N_2(\hat{S}) > 3$, ekkor $\exists s_j, s_l \in \hat{S}$, hogy a két elem (14)-beli felírását tekintve $I_j \cap I_l = \emptyset$, ekkor pedig

$$\{s_j, s_l\} \cup \{b_m | m \in I_j \cup I_l\}$$

egy 6 elemű 0-összeg. Hasonlóan, ha $N_3(\hat{S}) > 4$, akkor $\exists s_j, s_l \in \hat{S}$, hogy a két elem (14)-beli felírását tekintve $|I_j \cap I_l| = 1$. Ekkor pedig

$$\{s_j, s_l\} \cup \{b_m | m \in I_j \triangle I_l\}$$

ad egy hattagú 0-összeget, ahol $I_j \triangle I_l$ az I_j és I_l szimmetrikus differenciája.

Az N_2-re tett észrevétel alapján feltehetjük, hogy minden $s_j, s_l \in \hat{S}$ elemekre, melyek (14)-beli felírásában $|I_l| = |I_j| = 2$, teljesül, hogy $|I_j \cap I_l| = 1$. Hasonlóan, ha s_n, s_r felírásában $|I_n| = |I_r| = 3$, akkor $|I_n \cap I_r| = 2$ kell, hogy teljesüljön.

Legyen $N_2(\hat{S}) \geq 3$ és $N_3(\hat{S}) \geq 2$, legyen s_j, s_l, s_m olyanok, hogy $|I_l| = |I_j| = |I_m| = 2$. A megállapítás szerint feltehető, hogy ha $K = I_j \cup I_l \cup I_m$, akkor $|K| = 3$. Ezen kívül legyen s_n olyan, hogy $|I_n| = 3$ és $|I_n \cap K| = 2$, ez szintén feltehető a kettes metszetekre tett észrevétel miatt. Tfh. $I_n \cap K = I_j$. Ekkor véve a következő összeget:

$$s_j + s_n + s_l + \sum_{i \in (I_n \setminus I_j) \cup I_l} b_i,$$

egy hattagú 0-összeget kapunk.

Most tekintsük azt az esetet, amikor $N_3(\hat{S}) \geq 3$ és $N_2(\hat{S}) > 1$. Legyen s_j olyan, hogy $|I_j| = 2$, s_l, s_m, s_n olyan, hogy $|I_l| = |I_n| = |I_m| = 3$. Feltehető, hogy $|I_j \cap I_l| = 1$. Ekkor viszont

$$0 + s_j + s_l + \sum_{i \in I_j \triangle I_l} b_i$$

egy 6-tagú 0-összeg.

Ha pedig $N_3(\hat{S}) = 4$ és $N_2(\hat{S}) = 1$. Akkor az előző esethez hasonlóan feltehető, hogy van egy s_j, s_l pár, hogy $|I_j| = 2$, $|I_l| = 3$ és $|I_j \cap I_l| = 1$.

A $k = 4$ esetben kihasználjuk, hogy a 2.1. lemma miatt $\mathrm{s}_{8\bullet}(G) = \mathrm{D}(G \oplus \mathbb{Z}_8) = 13$. Így G tetszőleges 13 eleme tartalmaz egy (nem üres) 8-cal osztható hosszúságú 0-összeget.

A nagyobb k esetén pedig most is $K = 4$, $k' = 2$ választásokkal teljesülnek a 2.4. lemma után tett állítás feltételei, ugyanis $\mathrm{s}_2(G) = 10$. □

7. Összefoglalás, kitekintés

A dolgozatban egy az Erdős-Ginzburg-Ziv-tétel által motivált kombinatorikus csoportelméleti egyenlőtlenséget általánosítottunk egy új η_k konstans bevezetésével. Akárcsak a speciális $k = 1$ esetben az az aktuális sejtés, hogy minden csoportra az egyenlőtlenség valójában egyenlőséggel is teljesül.

Szem előtt tartva azokat az eseteket, amelyekre $k = 1$ esetén már a sejtés bizonyított, beláttuk, hogy az általánosabb sejtés is igaz, ha a csoport rangja legfeljebb kettő, továbbá a legfeljebb négy exponensű csoportok közül a három rangúakra is sikerült igazolni sejtésünket. Sőt e csoportok majdnem mindegyikére meghatároztuk a csoport összes, általunk tárgyalt konstansait.

Korábbi eredményeket felhasználva észrevettük, hogy tetszőleges csoport esetén legfeljebb véges sok k kivételével igaznak bizonyul a sejtésünk. Ezáltal kapcsolatot teremtettünk sejtésünk és egy rokon probléma ($\mathrm{l}(G)$ konstans meghatározása) között. Sőt, amint azt a harmadik fejezet végén is említettük azon csoportokra, amelyekre sejtésünket igazoltuk, $\mathrm{D}(G)$ ismeretében azonnal megkapjuk $\mathrm{l}(G)$ pontos értékét. Másképp szólva, ha sejtésünk igaz, akkor $\mathrm{l}(G)$ konstans $\mathrm{D}(G)$ függvényében általánosan is ismert.

Ezeken túl sejtésünk még két további sejtéssel is kapcsolatba hozható.

7.1. Sejtés (Gao, Thangadurai [10])**.** Legyen G tetszőleges csoport, ekkor a következő sorozat

$$\mathcal{S} = \{\mathrm{s}_\mathrm{k}(G) - k \cdot \exp(G)\}_{k=1}^{\mathrm{l}(G)-1}$$

szigorúan monoton csökken.

Azokra a csoportokra, amelyekre a dolgozatban sejtésünket igazoltuk, könnyen ellenőrizhetjük, hogy $\mathcal{S}$ ilyen. Most viszont annyit állíthatunk csak, hogy egy tetszőleges csoportra, ha a sejtésünk igaz, akkor $\mathcal{S}$ monoton csökken, ugyanis a definícióból azonnal következik, hogy η_k monoton csökkenően $\mathrm{D}(G)$*-hez tart.* A szigorú monotonitás ilyen könnyen nem látszik.

7.2. Sejtés (Gao [5])**.** Legyen G tetszőleges és $k \leq \mathrm{l}(G) - 1$. Ekkor

$$\mathrm{s}_\mathrm{k}(G) - k \cdot \exp(G) > \mathrm{D}(G) - 1. \tag{15}$$

Ez a sejtés a 7.1. sejtés közvetlen következménye, viszont számunkra ez a probléma önmagában külön érdekes, mert a mi sejtésünk igazságából is következne a 7.2. sejtés igazsága, azaz igaz a

7.1. Állítás. Legyen G olyan csoport, melyre igaz az 1.2. sejtés és legyen $k \leq \mathrm{l}(G) - 1$, akkor

$$\mathrm{s_k}(G) - k \cdot \exp(G) > \mathrm{D}(G) - 1. \tag{16}$$

Bizonyítás. Legyenek az állítás feltételei adottak. Ha $k = \mathrm{l}(G) - 1$, akkor $\mathrm{l}(G)$ konstans definíciója miatt

$$\mathrm{s_k}(G) \neq \mathrm{D}(G) + k \cdot \exp(G) - 1,$$

de mivel $\eta_\mathrm{k}(G) \geq \mathrm{D}(G)$ minden k-ra, sőt a sejtésünk igazsága mellett az egyenlőtlenség szigorú, ezért felhasználva az 1.3. tétel eredményét:

$$\mathrm{s_k}(G) > \mathrm{D}(G) + k \cdot \exp(G) - 1 \tag{17}$$

adódik. Ám ahogy azt már megjegyeztük $\eta_\mathrm{k}(G)$ definíciója szerint monoton csökken, így (17) teljesül minden $k \leq \mathrm{l}(G) - 1$ esetén. □

A *szigorú monotonitás* pedig egy következő vizsgálat tárgya lehet az új η_k konstansra vonatkozóan.

Hivatkozások

[1] Erdős P. & Ginzburg A. & Ziv A. Theorem in the additive number theory. *Bull. Res. Council Israel*, 10F:41–43, 1961.

[2] C. Elsholtz. Lower bounds for multidimensional zero sums. *Combinatorica*, 24:351–358, 2004.

[3] W. Gao. A combinatorial problem on finite abelian groups. *J. Number Theory*, 58:100–103, 1995.

[4] W. Gao. On zero-sum subsequences of restricted size iii. *Ars. Combin.*, 61:65–72, 2001.

[5] W. Gao. On zero-sum subsequences of restricted size ii. *Discrete Mathematics*, 271:51–59, 2003.

[6] W. Gao & A. Geroldinger. Zero-sum problems in finite abelian groups: A survey. *Expo. Math.*, 24:337–369, 2006.

[7] H. Harborth. Ein extremalproblem für gitterpunkte. *J. Reine Angew. Math.*, 262/263:356–360, 1973.

[8] J. E. Olson. A combinatorial problem on finite abelian groups. *J. Number Theory*, 1:8–10, 1969.

[9] A. Geroldinger & I. Ruzsa. *Combinatorial Number Theory and Additive Group Theory.* Birkhäuser, 2000.

[10] W. Gao & V. Thangadurai. On zero-sum sequences of prescribed length. *Aequationes Mathematicae*, 72:201–212, 2006.