Integrál alkalmazásai

Terület

Egy adott $f(x)$ függvény grafikonja és az x-tengely között lévő, $x = a$-tól $x = b$-ig tartó rész **terület**ének kiszámítása:

- Ha az f az x-tengely fölött van, akkor $T = \int_a^b f(x)\,dx$
- Ha az f az x-tengely alatt van, akkor $\mathrm{T} = -\int_a^b f(x)\,dx$
- Ha az f váltakozó előjelű, akkor ki kell számítani a függvény zérushelyeit, és a pozitív és negatív darabokon külön-külön számítani a területet.

Megjegyzés: Ha két adott görbe közötti rész területét kell kiszámítani, akkor először kiszámítjuk a görbék metszéspontjait, majd a metszéspontok között integráljuk a "felső görbe - alsó görbe" függvényt. Ilyenkor rajzoljunk ábrát!

Ívhossz

Egy adott $f(x)$ függvény $x = a$ és $x = b$ közötti darabjának **ívhossz**a:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Térfogat és Felszín

Egy adott $f(x)$ függvény $x = a$ és $x = b$ közötti darabját megforgatjuk az x-tengely körül.

1. Az így kapott forgástest **térfogat**a: $V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\,dx$
2. Az így kapott forgástest palástjának **felszín**e: $A = 2\pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$

Tömeg, Nyomaték és Súlypont

Az $f(x) \geq 0$ függvény és az x-tengely között lévő, $x = a$-tól $x = b$-ig tartó rész meghatároz egy síklapot. Ezt úgy képzeljük, mint egy vékony lemez. Legyen a lemez homogén és egységnyi sűrűségű.

Ekkor:

- A lemez **tömeg**e: $m = \int_a^b f(x)\,dx$
- A lemez **x-tengelyre** vonatkozó elsőrendű **nyomaték**a: $M_x = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx$
- A lemez **y-tengelyre** vonatkozó elsőrendű **nyomaték**a: $M_y = \int_a^b x \cdot f(x)\,dx$
- A lemez **súlypont**ja $S = (x_S,\, y_S)$, ahol:

  $$x_S = \frac{M_y}{m} \qquad y_S = \frac{M_x}{m}$$