Matematika G1F - 9. gyakorlat

2021. november 10.

Paraméteresen megadott görbék

Adott egy görbe a következő paraméteres alakban:

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & x(t) \\ y & = & y(t) \end{array}\right\} \qquad a \le t \le b$$

Akkor a t_0-beli érintő egyenlete:

$$y - y(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} \cdot (x - x(t_0))$$

1. Számítsd ki a következő paraméteresen adott görbék t_0 által meghatározott pontjában az érintőegyenes egyenletét!

a) $$\left.\begin{array}{rcl} x & = & 2\cos(-t) \\ y & = & \sin(-t) \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{r} -\frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{2} \\ t_0 = \frac{\pi}{6} \end{array}$$

b) $$\left.\begin{array}{rcl} x & = & \sin^2 t \\ y & = & \sin^2 t \operatorname{tg}^2 t \end{array}\right\} \qquad t_0 = \frac{\pi}{4}$$

Polárkoordinátás egyenlettel megadott görbék

Ha a görbe polárkoordinátás egyenlettel van megadva, vagyis így:

$$r = r(\varphi)$$

akkor át tudjuk írni paraméteres egyenletrendszerre:

$$\begin{array}{rcl} x & = & r(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \\ y & = & r(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \end{array}$$

és innentől kezdve úgy megy minden, mint ott:

$$\frac{y'(\varphi)}{x'(\varphi)} = \frac{r'(\varphi) \cdot \sin(\varphi) + r(\varphi) \cdot \cos(\varphi)}{r'(\varphi) \cdot \cos(\varphi) - r(\varphi) \cdot \sin(\varphi)}$$

(2.) Számítsd ki a következő polárkoordinátás egyenlettel adott görbe φ_0 által meghatározott pontjában az érintőegyenes egyenletét!

a) $r(\varphi) = e^{3\varphi}, \qquad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

b) $r(\varphi) = 2\cos\varphi, \qquad \varphi_0 = -\frac{\pi}{6}$

Integrálszámítás

(1) Az alapintegrálok és a következő két képlet segítségével határozzátok meg az integrálokat!

$$\boxed{\int (f \pm g) = \int f \pm \int g} \qquad \boxed{\int c \cdot f = c \cdot \int f}$$

a) $\displaystyle\int \left(3\,x^4 + \cos x\right)\,dx$

b) $\displaystyle\int \left(2\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)\,dx$

c) $\displaystyle\int \left(\frac{5}{\sqrt[7]{x^3}} + 2\,e^x\right)\,dx$

d) $\displaystyle\int \left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{1+x^2}\right)\,dx$

e) $\displaystyle\int \left(3\sin x + 5^x\right)\,dx$

f) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\,dx$

g) $\displaystyle\int \left(\operatorname{sh} x - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right)\,dx$

h) $\displaystyle\int \left(\operatorname{ch} x + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\right)\,dx$

(2) Az előző feladat eredményei és a következő képlet felhasználásával határozzátok meg az integrálokat!

$$\boxed{\int f(a\,x+b)\,dx = \frac{F(a\,x+b)}{a}\,, \quad \text{ha} \int f = F}$$

a) $\displaystyle\int \left(3\,(2\,x+1)^4 + \cos(x-1)\right)\,dx$

b) $\displaystyle\int \left(2\sqrt{3-2\,x} + \frac{1}{5x+2}\right)\,dx$

c) $\displaystyle\int \left(\frac{5}{\sqrt[7]{(6x+5)^3}} + 2\,e^{4-5x}\right)\,dx$

e) $\displaystyle\int \left(3\sin(10x-5) + 5^{1-x}\right)\,dx$

f) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{\sin^2(x+\pi)} + \frac{1}{\cos^2(x-\pi)}\right)\,dx$

g) $\displaystyle\int \left(\operatorname{sh}(2-3x) - \frac{1}{\operatorname{ch}^2(2x+3)}\right)\,dx$

③ Számítsátok ki az integrálokat a következő képlet segítségével!

$$\boxed{\int f' \cdot f^{\alpha} = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad (x \neq 1)}$$

a) $\displaystyle\int 6\,x^2 \cdot (2\,x^3 + 4)^3 \; dx$

b) $\displaystyle\int x^3 \cdot \sqrt{3 - x^4} \; dx$

c) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2 + 4}} \; dx$

d) $\displaystyle\int \sin x \cdot \cos^5 x \; dx$

e) $\displaystyle\int \cos x \cdot \sqrt[5]{\sin^2 x} \; dx$

f) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^3 x} \; dx$

g) $\displaystyle\int \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} \right) \; dx$

h) $\displaystyle\int \left(\frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1 + x^2} + \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}{\cos^2 x} \right) \; dx$

④ Számítsátok ki az integrálokat a következő képlet segítségével!

$$\boxed{\int \frac{f'}{f} = \ln f}$$

a) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^4 + 5} \; dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x + 1}{x^2 + 2x - 5} \; dx$

c) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \; dx$

d) $\displaystyle\int \operatorname{cth} x \; dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \operatorname{ctg} x} \; dx$

c) $\displaystyle\int \frac{3}{\operatorname{ch}^2 x \cdot \operatorname{th} x} \; dx$

g) $\displaystyle\int \frac{3}{x \ln x} \; dx$

h) $\displaystyle\int \frac{2}{\operatorname{arctg} x \cdot (x^2 + 1)} \; dx$