# Matematika G1F - 11. gyakorlat

2021. november 24.

## 9 Racionális törtfüggvények integrálása

$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ alakú integrál, ahol a $p(x)$ és a $q(x)$ polinomok.

A megoldás menete:

0. lépés: ha a számláló foka $\geq$ mint a nevező foka, akkor kell egy polinomosztás:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = \int r(x) + \frac{m(x)}{q(x)}\,dx$$

ahol az $r(x)$ a $p(x) : q(x)$ osztás eredménye, $m(x)$ pedig a maradék. Az $r(x)$ egy polinom, amit könnyű integrálni, a maradék törtnek pedik már kisebb fokú a számlálója, mint a nevezője.

1. lépés: a nevező szorzattá bontása (a lehető legtöbb tényezőre)

2. lépés: a nevező tényezői alapján megállapítjuk, hogy milyen parciális törtekre lesz szükségünk. Pl:

$$\frac{p(x)}{(x-1)(x+2)^3(x^2+x+3)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{(x+2)^3} + \frac{Ex+F}{x^2+x+3} + \frac{Gx+H}{x^2+1} + \frac{Ix+J}{(x^2+1)^2}$$

3. lépés: kiszámítjuk a konstansokat.

4. lépés: a kapott parciális törteket külön-külön kiintegráljuk.

### Alaptörtek integrálása

a) $\int \frac{3}{5x-2}\,dx$

b) $\int \frac{2}{3-x}\,dx$

c) $\int \frac{5}{x-1}\,dx$

a) $\int \frac{3}{(x-2)^3}\,dx$

b) $\int \frac{2}{(2x-3)^2}\,dx$

c) $\int \frac{5}{(2-x)^5}\,dx$

a) $\int \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx$

b) $\int \frac{x-3}{x^2+1}\,dx$

c) $\int \frac{2x-1}{x^2+4}\,dx$

c) $\int \frac{2x-1}{x^2+2x+4}\,dx$

**Végezzük el az integrálást!**

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-3x+2}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{3x-5}{x^2-x-12}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{4x^2-3x+5}{(x^2+1)(x-1)}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x^2+4x+6}{(x+1)^3}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{2x^3-2x^2-21x-5}{x^2-x-12}\,dx$