Deriválás

1. Konstans függvény deriváltja nulla: $\boxed{c' = 0}$
2. Hatványfüggvény deriváltja: $\boxed{(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}}$

$$x' = \left(x^1\right)' = 1 \cdot x^0 = 1, \qquad \left(x^5\right)' = 5 \cdot x^4, \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \qquad \left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\sqrt[5]{x^7}\right)' = \left(x^{\frac{7}{5}}\right)' = \frac{7}{5} \cdot x^{\frac{2}{5}} = \frac{7}{5} \cdot \sqrt[5]{x^2}, \qquad \left(\sqrt[5]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{5}}\right)' = \frac{2}{5} \cdot x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}, \qquad \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\right)' = \left(x^{-\frac{4}{3}}\right)' = -\frac{4}{3} \cdot x^{-\frac{7}{3}} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^7}}$$

A $\sqrt{x}$ és a $\frac{1}{x}$ deriváltjai nagyon gyakran előjönnek, őket érdemes külön is megjegyezni.

3. Exponenciális függvények deriváltja: $\boxed{(a^x)' = a^x \cdot \ln a}$ Fontos speciális eset: $\boxed{(e^x)' = e^x}$ (mert $\ln e = 1$)

$$(3^x)' = 3^x \cdot \ln 3, \qquad (5^x)' = 5^x \cdot \ln 5, \quad \text{stb.}$$

4. Logaritmus függvények deriváltja: $\boxed{(\log_a(x))' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}}$ Fontos speciális eset: $\boxed{(\ln x)' = \dfrac{1}{x}}$

$$(\log_2 x)' = \frac{1}{x \cdot \ln 2}, \qquad (\log_5 x)' = \frac{1}{x \cdot \ln 5}$$

5. Trigonometrikus függvények deriváltja: $\boxed{(\sin x)' = \cos x}$; $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$

Deriválási szabályok

Alapműveletek

$(c \cdot f)' = c \cdot f'$

$$(3 \cdot x^4)' = 3 \cdot (x^4)' = 3 \cdot 4 \cdot x^3 = 12 \cdot x^3$$
$$(-2 \cdot \sin x)' = -2 \cdot (\sin x)' = -2 \cdot \cos x$$

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

$$(x^2 + 2)' = (x^2)' + 2' = 2\,x + 0 = 2\,x$$
$$(\cos x + 2 \cdot e^x)' = (\cos x)' + 2 \cdot (e^x)' = -\sin x + 2 \cdot e^x$$
$$(\sqrt{x} + \ln x)' = (\sqrt{x})' + (\ln x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$$(x \cdot e^x)' = (x)' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' = e^x + x \cdot e^x$$
$$(\sin x \cdot \cos x)' = (\sin x)' \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)' = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-sinx) = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$(x^3 \cdot \ln x)' = (x^3)' \cdot \ln x + x^3 \cdot (\ln x)' = 3\,x^2\,\ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = 3\,x^2\,\ln x + x^2$$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

$$\left(\frac{e^x}{x^2}\right)' = \frac{(e^x)' \cdot x^2 - (e^x) \cdot (x^2)'}{x^4} = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot (2x)}{x^4} = \frac{x\, e^x \cdot (x-2)}{x^4} = \frac{e^x \cdot (x-2)}{x^3}$$

$$(tg\, x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(ctg\, x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Összetett függvény

$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Vagyis először deriváljuk a külső függvényt, (és a deriváltba a belső függvényt írjuk), és ezt megszorozzuk a belső függvény deriváltjával.

Néhány speciális eset összetett függvényre

$((g(x))^\alpha)' = \alpha \cdot g(x)^{\alpha-1} \cdot g'(x)$

Itt a külső függvény az α-adikonra emelés, ezért először a szerint deriválunk: α-szor a belső függvény az $(\alpha-1)$-ediken, aztán szorozni kell még a belső függvény deriváltjával.

$$\left((\sin x)^3\right)' = 3 \cdot \sin^2 x \cdot (\sin x)' = 3 \cdot \sin^2 x \cdot \cos x$$

$$\left(\sqrt{x^2+2}\right)' = \left((x^2+2)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \left(x^2+2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x^2+2)' = \frac{1}{2} \cdot \left(x^2+2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\,x = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$$

$\left(a^{g(x)}\right)' = \left(a^{g(x)}\, \ln a\right) \cdot g'(x)$ Speciális eset: $\left(e^{g(x)}\right)' = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

Itt a külső függvény az e-ad (akármi), aminek a deriváltja önmaga, és ezt még meg kell szorozni a belső függvény deriváltjával.

$$\left(e^{x^2+1}\right)' = e^{x^2+1} \cdot (x^2+1)' = e^{x^2+1} \cdot 2\,x$$

$$\left(e^{\cos x}\right)' = e^{\cos x} \cdot (\cos x)' = e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\sin x \cdot e^{\cos x}$$

$$\left(2^{\frac{x^2+1}{x}}\right)' = \left(2^{\frac{x^2+1}{x}} \ln 2\right) \cdot \left(\frac{x^2+1}{x}\right)' = \left(2^{\frac{x^2+1}{x}} \ln 2\right) \cdot \left(\frac{(x^2+1)' \cdot x - (x^2+1) \cdot (x)'}{x^2}\right) = \left(2^{\frac{x^2+1}{x}} \cdot \ln 2\right) \cdot \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$$

$\ln(g(x))' = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$

Itt a külső függvény az ln, aminek a deriváltja az "egy per" vagyis a belső függvény reciproka. És persze szorozni kell a belső függvény deriváltjával.

$$(\ln(\sin x))' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = ctg\, x$$

$$\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\,x}$$

$(\sin(g(x)))' = \cos(g(x)) \cdot g'(x)$

Itt a sin a külső függvény, aminek a deriváltja a cos aztán szorzunk a $g'(x)$-szel.

$$\big(\sin(x^2+\cos x)\big)' = \cos(x^2+\cos x)\cdot(x^2+\cos x)' = (2\,x-\sin x)\cdot\cos(x^2+\cos x)$$

Többszörösen összetett függvények

Háromszorosan összetett függvény: $\left(f\left(g\left(h\left(x\right)\right)\right)\right)' = f'\left(g\left(h\left(x\right)\right)\right)\cdot g'\left(h(x)\right)\cdot h'(x)$

És persze lehet akárhányszorosan összetett is.

$$(\ln(\ln(x^2)))' = \frac{1}{\ln(x^2)}\cdot(\ln(x^2))' = \frac{1}{\ln(x^2)}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot(x^2)' = \frac{1}{\ln(x^2)}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2\,x = \frac{2}{x\,\ln(x^2)}$$

Tehát a külső ln miatt kell egy "egy per a belső rész" és szorozni kell a belső rész deriváltjával. Aztán a következő ln miatt megint kell egy "egy per a következő belső rész" aztán szorzunk a maradék belső rész deriváltjával, ami egy sima $2\,x$ szorzót jelent.

$$\left(\sqrt{\sin(e^{2\,x})}\right)' = \frac{1}{2\,\sqrt{\sin(e^{2\,x})}}\cdot\big(\sin(e^{2\,x})\big)' = \frac{1}{2\,\sqrt{\sin(e^{2\,x})}}\cdot\cos\left(e^{2\,x}\right)\cdot\left(e^{2\,x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\,\sqrt{\sin(e^{2\,x})}}\cdot\cos\left(e^{2\,x}\right)\cdot\left(e^{2\,x}\right)\cdot(2x)' = \frac{1}{2\,\sqrt{\sin(e^{2\,x})}}\cdot\cos\left(e^{2\,x}\right)\cdot\left(e^{2\,x}\right)\cdot 2$$