1. Számítsuk ki e^{J^2}-et, ha $J = \mathrm{diag}(J_1, J_2)$ Jordan-mátrix, ha J_1 egy 3×3-as nilpotens Jordan-blokk, J_2 pedig a -1 sajátértékhez tartozó 2×2-es Jordan-blokk.

2. Hermite-interpolációval számítsuk ki az $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrixra az e^{2A} értékét!

3. Adjuk meg az alábbi A mátrix négyzetgyökét Hermite-interpoláció segítségével!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

4. Az $a, b \in \mathbb{C}$ milyen értékeire konvergens az A^k sorozat? Mikor tart a nullmátrixhoz?

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ a & b & 0 \end{bmatrix}$$

5. Adjunk explicit képletet az $x_{n+3} = 5x_{n+2} - 8x_{n+1} + 4x_n$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ rekurzív sorozat n. tagjára!

6. Ábrázoljuk a $\left\{P \;\middle|\; |d(P, F_2) - d(P, F_1)| = 1\right\}$ "hiperbolát", ha $F_1 = (1, 0)$, $F_2 = (-1, 0)$, és d az 1-norma, illetve a ∞-norma által indukált metrika $\mathbb{R}^2$-en.

7.
a) Bizonyítsuk be, hogy ha P egy pont a síkon, és e egy egyenes, akkor $\mathbb{R}^2$ minden normája szerint van e-nek P-hez legközelebbi pontja (ennek a P-től való távolsága az e egyenes távolsága P-től).
b) Lássuk be, hogy a tengelyekkel párhuzamos egyenesektől való távolság minden p-normára megegyezik az euklideszi távolsággal
c) Határozzuk meg a $P(1, 1)$ pont távolságát az $e: \; y = 2x$ egyenestől az 1-, 2- és ∞-norma szerint. Melyik az e egyenes P-hez legközelebbi pontja ezekre a normákra nézve?

Házi feladatok

Beadási határidő: május 21.

A feladatokra teljes, tömör és világos megoldást kérünk részletszámításokkal, indoklással, az eredmény leírása nem elegendő. A feladatok egy pontot érnek, a csillagos kettőt. A hétből hat feladat megoldását adjuk be, ezekből legalább 4 pontot el kell érni. Együtt gondolkozni szabad, de más megoldását lemásolni nem!

1. Határozzuk az alábbi A mátrix Jordan-normálalakját, J-t, és írjuk fel az e^J és $\sqrt{J}$ mátrixokat!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2. Keressük meg azt a $p(x)$ Hermite-féle interpolációs polinomot, melyre $e^B = p(B)$ a következő mátrixra, és számítsuk ki ebből az e^B értékét!

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Állapítsuk meg az alábbi mátrixokról, hogy a hatványaik konvergensek-e, és ha igen, a nullmátrixhoz tartanak-e.

$$A = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n} \qquad B = \begin{bmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/6 \end{bmatrix}$$

4. Adjunk explicit képletet az $x_{n+3} = 6x_{n+2} - 12x_{n+1} + 8x_n$, $x_0 = 1$, $x_1 = x_2 = 4$ rekurzív sorozat n. tagjára!

5. Ábrázoljuk $\mathbb{R}^2$-ben a $(0,1)$ fókuszú és $y = -1$ vezéregyenesű "parabolát" az összeg-, illetve a maximummetrikára nézve (azaz adjuk meg azoknak a pontoknak a mértani helyét, amelyek az adott metrika szerint egyenlő távolságra vannak a fókuszponttól és a vezéregyenestől)!

6. Adjunk meg $\mathbb{R}^n$-ben
- a) $2n$ pontot, amelyek az összegmetrikára és
- b) 2^n pontot, amelyek a maximummetrikára nézve páronként egyenlő távolságra vannak egymástól.

7*. Bizonyítsuk be, hogy a maximummetrikára nézve $\mathbb{R}^n$-ben legföljebb 2^n olyan pont van, amelyeknek a páronkénti távolsága egyenlő!