Algebra 2. **1. zh** *2009. március 25.*

1. Legyen α az $x^3+x+1 \in \mathbb{F}_2[x]$ polinom egy gyöke $\mathbb{F}_8$-ban. Adjuk meg α^3 minimálpolinomját $\mathbb{F}_2$ fölött.

2. Határozzuk meg az $x^4 - 10x^2 + 1$ polinom felbontási testének fokát $\mathbb{Q}$ fölött, illetve $\mathbb{F}_5$ fölött.

3. Legyen $f(x) = g(x^k) \in \mathbb{Q}[x]$, ahol $\deg g = t$ és $k > 1$. Bizonyítsuk be, hogy $|\mathrm{Gal}(f)| \leq (k-1) \cdot t! \cdot k^t$.

4. Legyen $K \leq L$, és tegyük fel, hogy $L \setminus K$-ban nincs K fölött algebrai elem. Bizonyítsuk be, hogy minden K fölötti irreducibilis polinom L fölött is irreducibilis.

5. Határozzuk meg az $x^6 + 3$ polinom Galois-csoportját $\mathbb{Q}[x]$ fölött, és adjuk meg a 3-Sylow-részcsoportjának megfelelő testbővítést.

6. Legyen $L|\mathbb{Q}$ normális, és tegyük föl, hogy $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}) \cong A_4$. Bizonyítsuk be, hogy L megkapható egy negyedfokú irreducibilis polinom felbontási testeként.

Algebra 2. **1. zh** *2009. március 25.*

1. Legyen α az $x^3+x+1 \in \mathbb{F}_2[x]$ polinom egy gyöke $\mathbb{F}_8$-ban. Adjuk meg α^3 minimálpolinomját $\mathbb{F}_2$ fölött.

2. Határozzuk meg az $x^4 - 10x^2 + 1$ polinom felbontási testének fokát $\mathbb{Q}$ fölött, illetve $\mathbb{F}_5$ fölött.

3. Legyen $f(x) = g(x^k) \in \mathbb{Q}[x]$, ahol $\deg g = t$ és $k > 1$. Bizonyítsuk be, hogy $|\mathrm{Gal}(f)| \leq (k-1) \cdot t! \cdot k^t$.

4. Legyen $K \leq L$, és tegyük fel, hogy $L \setminus K$-ban nincs K fölött algebrai elem. Bizonyítsuk be, hogy minden K fölötti irreducibilis polinom L fölött is irreducibilis.

5. Határozzuk meg az $x^6 + 3$ polinom Galois-csoportját $\mathbb{Q}[x]$ fölött, és adjuk meg a 3-Sylow-részcsoportjának megfelelő testbővítést.

6. Legyen $L|\mathbb{Q}$ normális, és tegyük föl, hogy $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}) \cong A_4$. Bizonyítsuk be, hogy L megkapható egy negyedfokú irreducibilis polinom felbontási testeként.

Algebra 2. **1. zh** *2009. március 25.*

1. Legyen α az $x^3+x+1 \in \mathbb{F}_2[x]$ polinom egy gyöke $\mathbb{F}_8$-ban. Adjuk meg α^3 minimálpolinomját $\mathbb{F}_2$ fölött.

2. Határozzuk meg az $x^4 - 10x^2 + 1$ polinom felbontási testének fokát $\mathbb{Q}$ fölött, illetve $\mathbb{F}_5$ fölött.

3. Legyen $f(x) = g(x^k) \in \mathbb{Q}[x]$, ahol $\deg g = t$ és $k > 1$. Bizonyítsuk be, hogy $|\mathrm{Gal}(f)| \leq (k-1) \cdot t! \cdot k^t$.

4. Legyen $K \leq L$, és tegyük fel, hogy $L \setminus K$-ban nincs K fölött algebrai elem. Bizonyítsuk be, hogy minden K fölötti irreducibilis polinom L fölött is irreducibilis.

5. Határozzuk meg az $x^6 + 3$ polinom Galois-csoportját $\mathbb{Q}[x]$ fölött, és adjuk meg a 3-Sylow-részcsoportjának megfelelő testbővítést.

6. Legyen $L|\mathbb{Q}$ normális, és tegyük föl, hogy $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q}) \cong A_4$. Bizonyítsuk be, hogy L megkapható egy negyedfokú irreducibilis polinom felbontási testeként.