1. *Bizonyítsuk be, hogy egy véges Abel-csoport minden $\mathbb{C}$ fölötti irreducibilis reprezentációja 1-dimenziós.*

Megoldás: $\mathbb{C}A$ kommutatív és féligegyszerű, tehát a mátrixgyűrűk direkt összegére bontásánál csak 1×1-es gyűrűk, azaz csak ferdetestek, de a kommutativitás miatt testek szerepelhetnek. Mivel $\mathbb{C}$ algebrailag zárt, és ezek a testek véges dimenziósak $\mathbb{C}$ fölött, a csoportalgebra $\mathbb{C}$-knek, azaz egydimenziós modulusoknak direkt összege. Így minden irreducibilis modulus 1-dimenziós.

2. *Bizonyítsuk be, hogy ha $N \lhd G$, akkor G/N minden irreducibilis reprezentációja egyúttal G-nek is irreducibilis reprezentációja.*

Megoldás: Egy csoport egy reprezentációját tekinthetjük a csoportalgebra fölötti modulusként, de a csoport egy $\varphi : G \to GL(V)$-be homomorfizmusaként is. Az utóbbi felfogásnál az irreducibilis modulusnak olyan vektortér felel meg, amelynek nincs valódi $\varphi(G)$-invariáns altere. Ha G/N-ből van ilyen homomorfizmus, az természetes módon ad egy homomorfizmust G-ből is, amelynek ugyanaz a képe, tehát ha az első irreducibilis, akkor a második is.

3. *Határozzuk meg $\mathbb{F}_3 Q$ és $\mathbb{C}Q$ összes irreducibilis modulusát!*

Megoldás: Mindkét csoportalgebra féligegyszerű, így irreducibilis modulusok direkt összegére bomlik, és csak ezek az összeadandók az irreducibilis modulusaik. Mivel $Q/Q' = Q/\langle -1 \rangle \cong C_2 \times C_2$, Q irreducibilis reprezentációi között vannak a $C_2 \times C_2$ csoport irreducibilis reprezentációi, amelyek az 1. feladat szerint mind 1-dimenziósak. A másodrendű elemek képe ezeknél a reprezentációknál a test első vagy másodrendű elemei lehetnek, így a generátorelemek ± 1-be képződhetnek. Ez 4 különböző egydimenziós irreducibilis reprezentáció, azaz 4 egydimenziós direkt összeadandó a csoportalgebrában. Ha van nem ferdetest összeadandó, az az alaptest fölött legalább 4 dimenziós, tehát ilyenből legföljebb egy lehet a 8-dimenziós csoportalgebrában.
Keressünk Q-nak másodfokú irreducibilis reprezentációját, azaz Q-val izomorf részcsoportot $\mathbb{C}^{2\times 2}$-ben (a homomorfizmusnak hűségesnek kell lennie, mert Q minden normálosztója tartalmazza $Q' = \langle -1 \rangle$-et, tehát ha az a magban lenne, akkor a reprezentáció a Q/Q' egy reprezentációjából származna, és így elsőfokú lenne). -1 képe nyilván $-I$, és i, j képe ennek "négyzetgyöke". Így olyan A, B mátrixokat keresünk a Q két generátorelemének képeként, amelyekre $A^2 = B^2 = -I$, és $B^{-1}AB = A^{-1} (= -A)$. $\mathbb{C}$ fölött az $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ ilyen, $\mathbb{F}_3$ fölött ugyanez az A az $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$-rel. Ezek valóban 2-odfokú irreducibilis reprezentációt adnak. (Valósak fölött nem találunk ilyen mátrixot, ott a hiányzó reprezentáció egy $\mathbb{R}$ fölött 4 dimenziós ferdetest.)

4. *Legyen R főideálgyűrű, és $a \in R$. Bizonyítsuk be, hogy annak az $n \times n$-es mátrixnak a kanonikus alakja, amelynek átlójában csupa a, alatta egy sor 1-es, és mindenhol máshol 0 áll, az a diagonális mátrix, amelynek átlójában $n-1$ 1-es után egy a^n van.*

Megoldás: A mátrix bal alsó $(n-1) \times (n-1)$-es részmátrixa egységmátrix, így minden $k < n$-hez van 1 determinánsú részmátrix, és ezért a $k \times k$-as aldeterminánsok legnagyobb közös osztója 1, ha $k \le n-1$. Ebből $D_1 = \ldots = D_{n-1} = 1$, és nyilván $D_n = a^n$, következésképpen a kanonikus alak diagonális elemei $d_k = D_k / D_{k-1} = 1$, ha $k < n$, és a^n, ha $k = n$.

5. *Bizonyítsuk be, hogy ha $p_1, \ldots, p_r$ prímek az R főideálgyűrűben, $a_{i1} \ge \ldots \ge a_{ik_i}$ pozitív egészek, $k_1 \ge \ldots \ge k_r$, és A egy olyan R fölötti négyzetes mátrix, amelynek átlójában $p_i^{a_{ij}}$ ($i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, k_i$) állnak), akkor A kanonikus alakjában az átló elemei alulról fölfelé $p_1^{a_{11}} \cdots p_r^{a_{r1}}, \ldots, p_1^{a_{1k_1}} \cdots p_r^{a_{rk_1}}$ és 1-esek állnak (a nem definiált kitevőket 0-nak véve).*

Megoldás: Szimultán sor- és oszlopcserékkel átrendezhetjük a diagonális elemeket úgy, hogy legalul $p_1^{a_{11}}, p_2^{a_{21}}, \ldots, p_r^{a_{r1}}$ állnak, fölötte $p_1^{a_{12}}, \ldots$, mindig az összes prímből a még el nem használt legnagyobb hatványokat téve egy blokkba. Ekkor először blokkonként hozzuk kanonikus alakra a mátrixot. Mivel egy blokkban minden átlós elem relatív prím, még a blokkméretnél eggyel kisebb aldeterminánsok is relatív prímek (mindegyik prímhatvány kimarad valamelyik diagonális aldeterminánsnál), így a blokk D_i determinánsosztói 1-ek és aztán a teljes determináns, és ebből az előző feladathoz hasonló módon láthatjuk, hogy a kanonikus alak átlós elemei is ilyenek. Ezek után már csak az átló újabb átrendezésére van szükség ahhoz, hogy a feladatban megadott alakot megkapjuk.

6. *Lássuk be, hogy egy A komplex mátrixra $A - xI$ kanonikus alakjából leolvasható a Jordan-féle normálalakja: a λ-hoz tartozó Jordan-blokkok méretei az átlóban szereplő polinomokban a λ gyök multiplicitása.*

Megoldás: Ha A Jordan-féle normálalakja J, és $J = P^{-1}AP$, akkor $J - xI = P^{-1}AP - xI = P^{-1}(A-xI)P$, és P invertálható $\mathbb{C}[x]$ fölött, minthogy P^{-1} is $\mathbb{C}[x]$-ben van. Tehát $A-xI$ kanonikus alakja megegyezik $J - xI$ kanonikus alakjával. Ha a λ_i-blokkok méretei $a_{i1} \geq a_{i2} \geq \ldots \geq a_{ik_i}$, akkor a blokkok kanonikus alakra hozása után a 4. feladat szerint $(x-\lambda_i)^{a_{i1}}, \ldots, (x-\lambda_i)^{a_{ik_i}}$ lesz a blokkok utolsó diagonális eleme. $x - \lambda_i$ prím $\mathbb{C}[x]$-ben, tehát a diagonális elemek átrendezése után alkalmazva az 5. feladat állítását azt kapjuk, hogy a kanonikus alak diagonális elemeiben a λ_i-k multiplicitása éppen a λ_i-blokkok méretei.

7. *Adjuk meg a $G = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ additív Abel-csoportban a $H = \langle(2,-4,3),(4,1,1),(0,2,2)\rangle$ részcsoport izomorfiatípusát és faktorát.*

Megoldás: A $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ kanonikus alakra hozásával azt kapjuk meg, hogy G egy alkalmas bázisában a H egy új generátorrendszerét hogyan lehet felírni. Az átalakítás:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -11 & 10 \\ 0 & 10 & -4 \end{bmatrix} \mapsto$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 10 \\ 0 & 10 & -4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 10 & -4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 56 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 56 \end{bmatrix}.$$

Így $G/H \cong (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/(-1)\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/56\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{56}$, H pedig $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$-vel izomorf, mert a szabad Abel-csoport három független eleme generálja.

8. *Határozzuk meg a $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ csoport $H = \langle(1,3,2),(1,1,0)\rangle$ részcsoporttal vett faktorcsoportját.*

Megoldás: G az $F = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ szabad Abel-csoportnak a $\langle(2,0,0),(0,4,0),(0,0,4)\rangle$ részcsoporttal vett faktora, és itt H ősképe $H_1 = \langle(1,3,2),(1,1,0),(2,0,0),(0,4,0),(0,0,4)\rangle$. Tehát a G/H faktorcsoport leírásához elegendő az $F/H1$ faktorcsoportot meghatározni. Ezt megint kanonikus alakra hozással számítjuk ki:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \mapsto$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát $G/H \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$

Hf1. *Keressünk A_4-nek $\mathbb{C}$ fölött* 1*-nél nagyobb dimenziós irreducibilis reprezentációját!*

Hf2. *Lássuk be, hogy egy R* 1*-elemes gyűrű centrumának minden nilpotens eleme benne van $J(R)$-ben. Mutassunk olyan elemet az S_3 szimmetrikus csoport* 2 *elemű test fölötti csoportalgebrájában, amely nilpotens ugyan, de nincs benne a Jacobson-radikálban.*