1. *Bizonyítsuk be, hogy ha R egy D ferdetest fölötti $n \times n$-es mátrixok gyűrűje, akkor R centruma, $Z(R) := \{ r \in R \,|\, rx = xr \ \forall\ x \in R \}$ a $\lambda \cdot I$ alakú mátrixokból áll, ahol $\lambda \in Z(D)$.*

Megoldás: Ha egy A mátrixban $a_{ij} \neq 0$ valamelyik $i \neq j$-re, akkor A-nak $I+E_{ji}$-vel (E_{ji} az a mátrix, amelynek egyetlen nem nulla eleme a ji helyen egy 1-es) vett konjugáltjában, $(I - E_{ji})A(I + E_{ji})$-ben (amelyet megkaphatunk úgy, hogy az A-ban a j. sorból kivonjuk az i.-et, majd az i. oszlophoz hozzáadjuk a j. oszlopot) a jj helyen $a_{jj} - a_{ij}$ áll, tehát a konjugált nem egyenlő A-val, és így $A \notin Z(R)$.
Ha pedig A diagonális, és $a_{ii} \neq a_{jj}$ valamely $i \neq j$-re, akkor azzal az elemi mátrixszal konjugálva A-t, amelyet az egységmátrixból az i. és j. sor cseréjével kapunk, A-ban az i. és j. sor, majd az i. és j. oszlop is helyet cserél, tehát az eredmény az a diagonlális mátrix, amely A-ból az a_{ii} és a_{jj} elem cseréjével kapható, tehát szintén különbözik A-tól.
Végül, ha $A = \lambda \cdot I$, ahol $\lambda \in D \setminus Z(D)$, akkor A valamely $\mu \cdot I$-vel nem cserélhető fel.
Tehát $Z(R)$ csak azokból a $\lambda \cdot I$ mátrixokból áll, amelyekre $\lambda \in Z(D)$, és ezek valóban centrális elemek.

2. *Féligegyszerű gyűrű részgyűrűje, ideálja, faktorgyűrűje féligegyszerű-e?*

Megoldás: A részgyűrű nem feltétlenül féligegyszerű, például a fölső háromszögmátrixok gyűrűje egy test fölötti legalább 2×2-es mátrixgyűrűben (az utóbbiról tudjuk, hogy féligegyszerű) nem féligegyszerű, mert van benne nilpotens jobbideál: azok a mátrixok, amelyeknek legföljebb a jobb fölső sarkában van nem nulla elem, ilyen ideált alkotnak.
Féligegyszerű gyűrű ideálja is az, ugyanis a féligegyszerű gyűrű mátrixgyűrűk direkt összege, és ennek az ideáljai a komponensek valamely ideáljainak direkt összegei (ld. 7. feladatsor, Hf2), de itt a komponensek egyszerűek, tehát az ideál is mátrixgyűrűk direkt összege, és így féligegyszerű.
Az előbbiből az is következik, hogy a faktorgyűrű is féligegyszerű, mert az meg az ideálból kimaradó mátrixgyűrűk direkt összege.

Egy egységelemes R gyűrű Jacobson-radikáljának nevezzük, és $J(R)$-rel jelöljük az R maximális jobbideáljainak metszetét.

3. *Lássuk be, hogy egy R gyűrűben egy a elem akkor és csak akkor van benne egy nilpotens jobbideálban, ha egy nilpotens balideálban is benne van.*

Megoldás: Ha aR nilpotens, mondjuk $(aR)^n = 0$, akkor az RaR ideál is az: $(RaR)^n = R(aR^2)^{n-1}aR = R(aR)^n = R0 = 0$.

4. *Legyen R egységelemes gyűrű, amely minimum- és maximumfeltételes a jobbideálokra nézve. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások ekvivalensek R tetszőleges J jobbideáljára.*

(i) J nilpotens;
(ii) J annullál minden egyszerű jobb R-modulust;
(iii) minden véges kompozícióláncú jobb R-modulust annullál J-nek egy alkalmas hatványa.

Megoldás: (i)$\Rightarrow$(ii): Ha S egyszerű, akkor $SJ \leq S$ miatt $SJ = 0$ vagy S. De ha $SJ = S$, akkor $S = SJ = SJ^2 = SJ^3 = \ldots = SJ^n = S0 = 0$ ellentmondás, tehát $SJ = 0$, azaz J annullálja S-et.
(ii)$\Rightarrow$(iii): Legyen $M = M_0 > M_1 > \ldots > M_r = 0$, ahol M_i/M_{i+1} egyszerű minden i-re. A (ii) feltétel miatt $(M_i/M_{i+1})J = 0$, azaz $M_iJ \leq M_{i+1}$, és így $MJ^r \leq M_1J^{r-1} \leq \ldots \leq M_{r-1}J \leq M_r = 0$.
(iii)$\Rightarrow$ (i): Mivel R maximum- és minimumfeltételes a jobbideálokra, R_R-nek van véges kompozíciólánca, tehát (iii) miatt van olyan r, amelyre $RJ^r = 0$, de $RJ^r \geq 1 \cdot J^r = J^r$, tehát J nilpotens.

5. *Bizonyítsuk be, hogy a 3. feladat feltételei mellett $J(R)$ az R legnagyobb nilpotens jobbideálja, azaz $J(R)$ maga nilpotens, és tartalmaz minden nilpotens jobbideált.*

Megoldás: Legyen I az egyszerű jobbmodulusok annullátorainak metszete. Ez nyilván ideál, és a 4. feladat szerint nilpotens is. Sőt, R/I-ben nincs nem triviális nilpotens jobbideál, mert annak az őse R-ben szintén nilpotens lenne, és így a 4. feladat miatt benne lenne I-ben. Tehát a Wedderburn–Artin-tétel szerint R/I féligegyszerű, és emiatt I tartalmazza $J(R)$-et (a faktorban a maximális részmodulusok metszete 0), így $J(R)$ is nilpotens.
Ha J nilpotens jobbideál, akkor a 4. feladat állítása szerint annullál minden egyszerű modulust, azaz minden R/M faktormodulust is, ahol M maximális jobbideál. Ebből következik, hogy $RJ \leq M$ minden maximális M-re, és tehát RJ, és így J is benne van ezek metszetében, $J(R)$-ben is.

6. *Bizonyítsuk be, hogy egy R 1-elemes jobb-Artin gyűrűben a Jacobson-radikál ideál, és ugyanezt az ideált kapnánk, ha maximális balideálok metszeteként definiálnánk.*

Megoldás: Egy egységelemes jobb-Artin gyűrű Hopkins tétele szerint jobb-Noether is, tehát érvényesek a 4. és 5. feladat állításai.
$J(R)$ nilpotens, tehát az $RJ(R)$ ideál is nilpotens (ld. a 3. feladat bizonyítását), és mivel az is jobbideál, az 5. feladat állítása szerint $RJ(R) \leq J(R)$, azaz $J(R)$ ideál is.
Ahhoz, hogy balideálokkal definiálva ugyanezt a Jacobson-radikált kapjuk, felhasználjuk a 7. feladat állítását: $R/J(R)$ féligegyszerű gyűrű, így balmodulusként is féligegyszerű, tehát (véges sok) egyszerű balmodulus direkt összege, és emiatt $R/J(R)$-ben a triviális modulus maximális balideálok (a direkt összeadandókból kihagyunk egyet) metszete, és emiatt $J(R)$ tartalmazza az összes maximális balideál metszetét. Fordítva, ha M maximális balideál, akkor $J(R)$ nilpotenciája miatt $J(R)({}_R R/M) = 0$, tehát $J(R) = J(R)R \leq M$, vagyis $J(R)$ benne van a maximális balideálok metszetében.

7. *Bizonyítsuk be, hogy egy 1-elemes jobb-Artin gyűrűnek a Jacobson-radikállal vett faktora féligegyszerű.*

Megoldás: $R/J(R)$-ben nem lehet nem triviális nilpotens jobbideál, mert ha $J/J(R)$ ilyen, akkor $J^n \leq J(R)$ valamilyen n-re, s mivel $J(R)$ nilpotens, ekkor van olyan k, hogy $J^{nk} \leq J(R)^k = 0$. Tehát J is nilpotens, és az 5. feladat szerint ekkor $J \leq J(R)$, vagyis $J/J(R) = 0$. Mivel $R/J(R)$ jobb-Artin gyűrű is, szükségképpen féligegyszerű.

8. *Bontsuk föl mátrixgyűrűk direkt összegére a $\mathbb{C}C_4$ és az $\mathbb{F}_2C_3$ csoportalgebrákat!*

Megoldás: Tetszőleges n elemű csoport csoportalgebrájában $\frac{1}{n}\sum_{g\in G} g$ nilpotens elem, ha a test karakterisztikája nem osztja n-et.
Legyen $C_4 = \langle a\rangle$ és $A = \mathbb{C}C_4$. Az előbbi észrevételt az $\langle a^2\rangle$ csoportra alkalmazva kapjuk az $\frac{1}{2}(1+a^2)$ idempotenst és ebből az $X = \frac{1}{2}(1+a^2)A$ és $Y = \frac{1}{2}(1-a^2)A$ direkt komponenseket. Ha X-ben keresünk idempotenseket, akkor az elemeket $(1+a^2)(x+ya)$ alakban írhatjuk, és felhasználhatjuk, hogy $(1+a^2)a^2 = (1+a^2)1$. Tehát itt az $(1+a^2)^2(x+ya)^2 = 2(1+a^2)(x^2+y^2+2xya) = (1+a^2)(x+ya)$ egyenlőségnek kell teljesülnie az X-beli idempotens elemekre. Ebből kapjuk az $e_1 = \frac{1}{4}(1+a^2)(1+a)$ és $e_2 = \frac{1}{4}(1+a^2)(1-a)$ komplementer idempotens elemeket. Hasonlóan az Y komponensben a $2(1-a^2)(x^2-y^2+2xya) = (1-a^2)(x+ya)$ egyenletből az $e_3 = \frac{1}{4}(1-a^2)(1+ia)$, $e_4 = \frac{1}{4}(1-a^2)(1-ia)$ idempotenspárt kapjuk. Tehát $A = e_1A \oplus e_2A \oplus e_3A \oplus e_4A$ ideálok direkt összege (mivel A kommutatív, a jobbideálok egyúttal ideálok is), és mivel a komponensek 1-dimenziósak, ez tovább nem bontható, és a komponensek $\mathbb{C}$-vel izomorfak.
Ha $C_3 = \langle a\rangle$, akkor $A = \mathbb{F}_2C_3$-ban $\frac{1}{3}(1+a+a^2) = 1+a+a^2$ idempotens, és $a+a^2$ a párja. Ebből A két direkt komponense $X = (1+a+a^2)A$ és $Y = (a+a^2)A$. Az első egy, a második két dimenziós, de a másodikat sem lehet tovább bontani, mert nincs valódi részmodulusa. Ebből már következik

is, hogy Y (ferde)test (egy legalább 2×2-es mátrixgyűrűnek vannak valódi részmodulusai), de könnyű is ellenőrizni, hogy minden nem nulla eleme invertálható, így $X \cong \mathbb{F}_2$ és $Y \cong \mathbb{F}_4$.

9. *Keressük meg a $\mathbb{F}_2 C_4$ csoportalgebra összes ideálját! Mi az algebra Jacobson-radikálja?*

Megoldás: Legyen $C_4 = \langle a \rangle$. Az $1 + a$ által generált ideál azokból az elemekből áll, amelyekben az együtthatók összege 0, így 3-dimenziós, és ezért maximális (jobb)ideál. Másrészt $(1 + a)^4 = 1 + a^4 = 0$ miatt ez az ideál nilpotens, tehát ez a Jacobson-radikál. A Jacobson-radikál benne van minden maximális (jobb)ideálban, de ez már maga is maximális, tehát $J(A)$ az egyetlen maximális ideál, és így minden más valódi ideál benne van $J(A)$-ban. Nyilván $A > (1 + a)A > (1 + a)^2 A > (1 + a)^3 A > 0$. $1 + a$ annullál minden egyszerű modulust, így minden modulust beleszoroz az összes maximális részmodulusába. Ebből következik, hogy az előbb megadott kompozíciólánc minden tagjának egyetlen maximális részmodulusa a lánc következő tagja, és így nincs is a csoportalgebrában más részmodulus (ideál), mint a fönti kompozíciólánc tagjai.

Hf1. *Legyen R a H halmaz részhalmazain definiált Boole-gyűrű, tehát a szorzás a metszet, az összeadás a szimmetrikus differencia. Bizonyítsuk be, hogy R akkor és csak akkor féligegyszerű, ha H véges.*

Hf2. *Bizonyítsuk be, hogy a KG csoportalgebra centruma a teljes konjugáltosztály-összegek lineáris kombinációiból áll.*

Hf3. *Felbontható-e az $\mathbb{F}_2 S_3$ csoportalgebra valódi ideáljainak, illetve részmodulusainak direkt összegére?*