A feladatokban a gyűrűk egységelemesek, a modulusok unitérek.

1. *Írjuk le a 2×2-es valós mátrixok gyűrűjében a a jobbideálokat. Tegyük meg ugyanezt a fölső háromszögmátrixok gyűrűjére is.*

Megoldás: Ha $\mathbb{R}^{n\times n}$ egy mátrixát megszorozzuk balról a gyűrű egy mátrixával, akkor az így kapott mátrix oszlopai az eredetinek lineáris kombinációi, és ilyen módon az összes olyan mátrixot megkaphatjuk, amelynek az oszloptere része az eredeti mátrix oszlopterének. Két mátrix összegének oszloptere része a két oszloptér generátumának. Ebből következik, hogy $\mathbb{R}^n$ tetszőleges W alterére azok a mátrixok, amelyeknek az oszloptere W-ben van, jobbideált alkotnak a mátrixgyűrűben, és fordítva, minden jobbideál ilyen alakú, mert az ideálbeli mátrixterek generátumához tartozó oszlopterű mátrixok mind elemei a jobbideálnak. A 2×2-es mátrixgyűrűben ez minden λ testelemhez megadja azokat a mátrixokat, amelyeknek a második sora az elsőnek λ-szorosa (azaz a mátrix oszlopterét $(1, \lambda)$ generálja), és még van az az altér, ahol az első sor $\mathbf{0}$, és persze a 0 ideál, és a teljes gyűrű.

Legyen most R a 2×2-es fölső háromszögmátrixok gyűrűje. Nyilvánvaló, hogy R minden invertálható eleme az egész R-et generálja mint jobbideált. Ha van az adott jobbideálban olyan A mátrix, amelyre $a_{11} \neq 0$, akkor $\begin{bmatrix} a_{11} & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b/a_{11} & c/a_{11} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, tehát minden $\begin{bmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ alakú mátrix benne van a generált jobbideálban, ennél nagyobb pedig már tartalmazna invertálható mátrixot. Ha viszont $a_{11} = 0$ a jobbideál minden elemére, akkor a második oszlopok egy W alteret alkotnak $\mathbb{R}^2$-ben, tehát a jobbideál $\{[\mathbf{0}|\mathbf{w}] \mid w \in W\}$, és $\mathbb{R}^2$ minden alterére az így felírt halmaz jobbideálja R-nek. Összefoglalva: a jobbideálok 0, R, $\left\{\begin{bmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & * \end{bmatrix}\right\}$, és $\mathbb{R} \cdot [\mathbf{0}|\mathbf{v}]$ az $\mathbb{R}^2$ $\mathbf{v}$ vektoraira.

2. *Legyen M egy végesen generált $\mathbb{C}[x]$-modulus.*

a) Bizonyítsuk be, hogy M komplex vektortér, amelyen az x-szel való szorzás lineáris transzformációként hat.
b) Mik az M részmodulusai?
c) Mik az M egyszerű részmodulusai?
d) Melyek a féligegyszerű $\mathbb{C}[x]$-modulusok?

Megoldás: a) $\mathbb{C} \leq \mathbb{C}[x]$ miatt M komplex vektortér. Mivel $\mathbb{C}[x]$-ben bármely $p(x)$ polinomra és $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ számokra $\lambda p(x) = p(x)\lambda$, és $(\lambda + \mu)p(x) = \lambda p(x) + \mu p(x)$, bármely polinommal, így az x-szel való jobbszorzás is vektortérhomomorfizmus M-en (ugyanígy egy M_R moduluson mint $Z(R)$-moduluson modulushomomorfizmus az R tetszőleges elemével való jobbszorzás). Az x hatása már meghatározza az összes polinom hatását is, tehát a $\mathbb{C}[x]$-modulusok és a (komplex vektortér, lineáris transzformáció) párok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés van.

b) Ha az x-szel való jobbszorzásnak az f lineáris transzformáció felel meg, akkor M részmodulusai éppen az M f-invariáns alterei.

c) Mivel egy nem triviális komplex vektortér tetszőleges lineáris transzformációjának van sajátvektora, minden invariáns altérben is van sajátvektor, és az általa generált altér invariáns altér, az egyszerű modulusok azok az egydimenziós alterek, amelyeket egy-egy sajátvektor generál.

d) M féligegyszerű, ha egydimenziós invariáns alterek direkt összege, azaz ha létezik sajátvektorokból álló bázisa, vagyis ha az f (mátrixa) diagonalizálható.

3. *Mi a kategóriaelméleti szorzat és koszorzat az Abel-csoportok körében? Mi a szorzat a csoportok körében? Bizonyítsuk be, hogy egy A és B csoport koszorzata a csoportok körében a szabad szorzatuk, vagyis az a csoport, amelynek elemei $a_1b_1a_2b_2 \cdots a_nb_n$ alakú szavak ($a_i \in A$, $b_i \in B$), és a szorzatukban egyszerűsíteni csak szomszédos azonos komponensbelieket lehet, illetve az 1-et bármivel.*

Megoldás: Az Abel-csoportok $\mathbb{Z}$ fölötti modulusoknak tekinthetők, tehát a szorzat, illetve koszorzat a direkt szorzat, illetve direkt összeg. Az előbbinek a bizonyítása: Legyen P az A_i Abel-csoportok teljes Descartes-szorzata a komponensenkénti művelettel, és legyen $\alpha_i : P \to A_i$ az a leképezés, amely P minden eleméhez az i indexű komponensét rendeli. Ha $\beta_i : C \to A_i$ homomorfizmusok valamely C Abel-csoportra, akkor definiáljuk a $\varphi : C \to P$ homomorfizmust úgy, hogy az minden $c \in C$-hez P-nek azt az elemét rendeli, amelynek i. komponense $\beta_i(c)$. Ekkor $\alpha_i \circ \varphi = \beta_i$ minden i-re, tehát valóban a direkt szorzatot kaptuk.

Az A és B csoport szabad szorzatát leírhatjuk úgy is, hogy ha $A \cong F(X)/N$ és $B \cong F(Y)/M$ szabad csoportok faktorai (ahol $X \cap Y = \emptyset$), akkor A-nak és B-nek az $A * B$ szabadszorzatát megkaphatjuk úgy, hogy az $F(X \cup Y)$ szabad csoportot lefaktorizáljuk az $N \cup M$ által generált normálosztóval. Ebbe természetes módon beágyazódik A és B, mert $\langle X\rangle \cap M = 1$ és $\langle Y\rangle \cap N = 1$. Ha pedig van egy C csoport, és $\beta_1 : A \to C$, $\beta_2 : B \to C$, akkor a $\varphi : X \cup Y \to C$, $x \mapsto \beta_1(Nx)$, $y \mapsto \beta_2(My)$ leképezés kiterjeszthető egy $F(X \cup Y) \to C$ homomorfizmussá, és ennek a magjában benne van $N \cup M$, tehát találunk egy $A * B \to C$ homomorfizmust is, amely kielégíti a koszorzat definícióját.

Az egyértelműség mindkét esetben nyilvánvaló.

4*. *Tudjuk, hogy $\mathbb{Z}[x]$ minden ideálja végesen generált, de nem főideálgyűrű. Van-e minden n természetes számhoz olyan ideál $\mathbb{Z}[x]$-ben, amelyet n elemmel lehet generálni, de kevesebbel nem?*

Megoldás: Legyen $R = \mathbb{Z}[x]$, és $I = (2, x)$ ideál R-ben. Belátjuk, hogy I^n generálható $n+1$ elemmel, de n elemmel nem.

Nyilvánvaló, hogy $I^n = (2^n, 2^{n-1}x, \dots, 2x^{n-1}, x^n)$, tehát I^n-et $n+1$ elem generálja. I^n azokból a $\sum a_i x^i$ polinomokból áll, amelyekre 2^i osztója a_{n-i}-nek $i = 0, 1, \dots, n$-re, ugyanis ezek nyilván benne vannak a generált ideálban, másrészt ideált alkotnak. R ideáljait tekinthetjük R-modulusoknak. Az I^n/I^{n+1} modulust annullálja I, ezért ez egyúttal R/I modulus is, azaz, mivel $R/I = \mathbb{Z}[x]/(2,x) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{F}_2$, vektortér $\mathbb{F}_2$ fölött. I^n/I^{n+1}-ben a $2^n, 2^{n-1}x, \dots, 2x^{n-1}, x^n$ elemek lineárisan függetlenek, mert ha egy $\{0,1\}$-együtthatós lineáris kombinációjuk (minden generált elem ilyen alakban írható, mert $R/I \cong \mathbb{F}_2$) benne van I^{n+1}-ben, akkor minden együttható 0. (Természetesen generátorrendszert, és így bázist is alkotnak). Így I^n/I^{n-1} mint vektortér $n+1$-dimenziós, tehát R-modulusként sem generálható $(n+1)$-nél kevesebb elemmel, és emiatt I^n-nek is $n+1$-elemű a legkisebb generátorrendszere, hiszen I^n generátorrendszere a faktormodulusnak is generátorrendszerét adná.

5. *Legyen V egy megszámlálhatóan végtelen dimenziós vektortér, és $E = \mathrm{End}(V)$ a V lineáris transzformációinak gyűrűje. Bizonyítsuk be, hogy a véges rangú transzformációk egy I ideált alkotnak E-ben, és az $R = E/I$ gyűrű egyszerű, de R_R nem maximumfeltételes, és nem is minimumfeltételes.*

Megoldás: Mivel egy altér képének dimenziója egy $U \to W$ lineáris leképezésnél nem lehet nagyobb, mint U vagy V dimenziója, a véges rangú transzformációk halmaza zárt a transzformációkkal való jobb- vagy balszorzásra. Az összegnek, illetve különbségnek a rangja pedig legföljebb a rangok összege.

E/I egyszerű, mert minden nem triviális eleme az egész E/I-t generálja: ha egy φ lin. leképezés nem véges rangú, akkor a képtér egy (megszámlálhatóan végtelen) bázisának elemeit V egy előre rögzített bázisának $\mathcal{B}$ elemeibe képezhetjük egy α lin. leképezéssel, és a képtér ezen bázisának egy ősképe (amely nyilván szintén független) egy másik leképezésnél a $\mathcal{B}$ elemeinek képeit adhatja egy β leképezésnél, tehát $\alpha \circ \varphi \circ \beta = id$, és így φ az egész E-t, illetve E/I-ben az egész E/I-t generálja.

E/I nem maximumfeltételes és nem minimumfeltételes, mert azok a lin. leképezések, amelyeknek képtere egy adott altérbe esik jobbideált alkotnak, és a megszámlálhatóan végtelen dimenziós vektortérben létezik altereknek végtelen növő és végtelen fogyó sorozata is.

6. *Bizonyítsuk be, hogy ha R_R maximumfeltételes, akkor minden végesen generált M_R modulus is maximumfeltételes.*

Megoldás: Ha $M = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$, akkor M homomorf képe R_R n példánya direkt összegének, és a maximumfeltétel öröklődik véges direkt összegre és homomorf képre.

7. *Legyen $E = \mathrm{End}(M)$ egy M modulus önmagába menő homomorfizmusainak (endomorfizmusainak) gyűrűje. Bizonyítsuk be, hogy*

a) E_E-nek, illetve ${}_EE$-nek akkor és csak akkor van nem triviális direkt felbontása, ha M-nek van;
b) $\mathrm{End}({}_RR) \cong R$.

Megoldás: a) Direkt felbontás akkor van, ha van E-ben az id leképezésen kívül idempotens elem. Egy direkt felbontás egyik komponensére való vetítés nyilvánvalóan ilyen, és fordítva, ha π idempotens, akkor $M = \mathrm{Ker}\,\pi \oplus \mathrm{Im}\,\pi$, ugyanis ha $u \in \mathrm{Ker}\,\pi \cap \mathrm{Im}\,\pi$, akkor $u = \pi(v) = \pi^2(v) = \pi(u) = 0$, továbbá $u \in M$-re $u - \pi(u) \in \mathrm{Ker}\,\pi$, mert $\pi(u - \pi(u)) = \pi(u) - \pi^2(u) = \pi(u) - \pi(u) = 0$
b) Egy R-beli elemmel való jobbszorzás nyilván endomorfizmusa ${}_RR$-nek, és ezek mind különbözők (mert 1-en másképp hatnak), és az R leképezés $\mathrm{End}({}_RR)$-be műveletartó. Másrész tetszőleges $\varphi \in \mathrm{End}({}_RR)$-re és $r = \varphi(1)$-re $\varphi(x) = \varphi(x \cdot 1) = x \cdot \varphi(1) = xr$. Tehát R valóban a teljes $\mathrm{End}({}_RR)$-vel izomorf.

8. *Mutassuk meg, hogy ha egy R kommutatív nullosztómentes gyűrű minimumfeltételes, akkor R test.*

Megoldás: 1. megoldás: Ha $0 \neq a \in R$, akkor az $aR \geq a^2R \geq \ldots \geq A^nR \geq \ldots$ sorozat valahol leáll, azaz van olyan n, hogy $a^nR = a^{n+1}R$. De akkor $1 \in R$ miatt $a^n \in a^{n+1}R$, azaz $a^n = a^{n+1}r$ valamely r-re. Ebből $a^n(1 - ar) = 0$, és nullosztómentesség miatt $1 - ar = 0$, azaz a invertálható. (Az egységelem létezését sem kell föltenni, az is az előbbiekhez hasonlóan bizonyítható.)

2. megoldás: R féligegyszerű, mert a nullosztómentesség miatt nincs valódi nilpotens jobbideálja, és feltettük, hogy R minimumfeltételes. Így a Wedderburn–Artin-tétel szerint mátrixgyűrűk direkt összege. A kommutativitás (vagy a nullosztómentesség) miatt ezek csak 1×1-es mátrixgyűrűk, azaz ferdetestek lehetnek, de a kommutativitás miatt csak testek. Ráadásul a nullosztómentesség miatt nem lehet R-nek több direkt összeadandója, tehát R test.

9. *Legyen R (kommutatív) Noether-gyűrű, $I \lhd R$, és tegyük föl, hogy az I-beli elemek nilpotensek. Mutassuk meg, hogy van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $I^n = 0$.*

Megoldás: Mivel R Noether-gyűrű, I végesen generált: $I = (r_1, \ldots, r_k)$. Tegyük föl, hogy $r_i^{n_i} = 0$ minden i-re. Ekkor $N = n_1 + \ldots + n_k$ -ra $I^N = 0$, ugyanis a $\sum r_i x_{ij}$ elemek szorzatában ($j = 1, ..., N$-re) minden tagban valamelyik r_i-ből van legalább n_i darab.

Hf1. *Legyenek A, B és C részmodulusok az M modulusban, és tegyük föl, hogy $A \geq C$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $A \cap (B + C) = (A \cap B) + C$.*

Hf2. *Legyen $R = A \oplus B$ az A és B gyűrűk direkt összege. Bizonyítsuk be, hogy R minden ideálja $A_1 \oplus B_1$ alakú, ahol $A_1 \lhd A$ és $B_1 \lhd B$.*

Hf3. *Legyen M egy minimum- és maximumfeltételes modulus, és $f : M \to M$ endomorfizmus. Bizonyítsuk be, hogy van olyan n, amelyre $M = \mathrm{Ker}\, f^n \oplus \mathrm{Im}\, f^n$. (Útmutatás: tekintsük a $\mathrm{Ker}\, f \leq \mathrm{Ker}\, f^2 \leq \ldots$ és $\mathrm{Im}\, f \geq \mathrm{Im}\, f^2 \geq \ldots$ modulusláncokat.)*