1. Adjuk meg az $A = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8$ csoportban a $B = \langle (2,2,0),(2,1,4)\rangle$ részcsoportnak és az A/B faktorcsoportnak a ciklikusokra való felbontását.

2. Határozzuk meg az $A - xI$ mátrix kanonikus alakját, ha

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mit mondhatunk az A mátrix Jordan-normálalakjáról?

3. Bizonyítsuk be, hogy
a) ha α és β epimorfizmus, akkor $\alpha \circ \beta$ is az;
b) ha α és β monomorfizmus, akkor $\alpha \circ \beta$ is az;
c) ha $\alpha \circ \beta$ epimorfizmus, akkor α is az.
d) ha $\alpha \circ \beta$ monomorfizmus, akkor β is az;

4. A halmazok, Abel-csoportok, csoportok, 1-elemes gyűrűk kategóriája közül melyikben igaz, hogy minden epimorfizmus szürjektív, illetve hogy minden monomorfizmus injektív?

5. Legyen $\mathcal{K}$ az a kategória, amelynek egyetlen objektuma a C_2 csoport, és morfizmusai az id és az azonosan 1 leképezés. Van-e ebben a kategóriában a C_2-nek önmagával szorzata, illetve koszorzata? És ha az id leképezés a kategória egyetlen morfizmusa?

6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges számú projektív modulus direkt összege projektív, és tetszőleges számú injektív modulus direkt szorzata injektív.

7. Mutassuk meg, hogy egy P modulus pontosan akkor projektív, ha van olyan F szabad modulus, amelyre $F \cong P \oplus F$.

8. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Z}$ megszámlálhatóan végtelen sok példányának a direkt szorzata nem projektív Abel-csoport.

9*. Bizonyítsuk be, hogy minden projektív Abel-csoport szabad. Sőt, szabad Abel-csoportnak minden részcsoportja is szabad.

10. a) Bizonyítsuk be, hogy minden ciklikus projektív jobb R-modulus direkt összeadandója R_R-nek.
b) Mutassuk meg, hogy ha egy A véges dimenziós algebrára $A = P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_n$, ahol $P_1, \ldots, P_n$ direkt felbonthatatlan modulusok, akkor minden direkt felbonthatatlan projektív A-modulus izomorf valamelyik P_i-vel, és minden projektív ilyen modulusok direkt összege.

Hf1. Írjuk fel a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ csoport $(2,3,3),(4,0,4),(8,6,2)$ által generált csoportja szerinti faktorcsoportját prímhatványrendű ciklikuscsoportok szorzataként.

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy az a $C_3 \to A_4$ homomorfizmus, amely a ciklikus csoport generátorelemét $(1,2,3)$-ba viszi, nem epimorfizmus.

Hf3. Mi a koszorzat a halmazok kategóriájában?