

1. Bizonyítsuk be, hogy egy véges Abel-csoport minden  $\mathbb{C}$  fölötti irreducibilis reprezentációja 1-dimenziós.
  2. Bizonyítsuk be, hogy ha  $N \triangleleft G$ , akkor  $G/N$  minden irreducibilis reprezentációja egyúttal  $G$ -nek is irreducibilis reprezentációja.
  3. Határozzuk meg  $\mathbb{F}_3Q$  és  $\mathbb{C}Q$  összes irreducibilis modulusát!
  4. Legyen  $R$  főideálgyűrű, és  $a \in R$ . Bizonyítsuk be, hogy annak az  $n \times n$ -es mátrixnak a kanonikus alakja, amelynek átlójában csupa  $a$ , alatta egy sor 1-es, és mindenhol máshol 0 áll, az a diagonális mátrix, amelynek átlójában  $n - 1$  1-es után egy  $a^n$  van.
  5. Bizonyítsuk be, hogy ha  $p_1, \dots, p_r$  prímek az  $R$  főideálgyűrűben,  $a_{i1} \geq \dots \geq a_{ik_i}$  pozitív egészek,  $k_1 \geq \dots \geq k_r$ , és  $A$  egy olyan  $R$  fölötti négyzetes mátrix, amelynek átlójában  $p_i^{a_{ij}}$  ( $i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, k_i$ ) állnak), akkor  $A$  kanonikus alakjában az átló elemei alulról fölfelé  $p_1^{a_{11}} \cdots p_r^{a_{r1}}, \dots, p_1^{a_{1k_1}} \cdots p_r^{a_{rk_1}}$  és 1-esek állnak (a nem definiált kitevőket 0-nak véve).
  6. Lássuk be, hogy egy  $A$  komplex mátrixra  $A - xI$  kanonikus alakjából leolvasható a Jordan-féle normálalakja: a  $\lambda$ -hoz tartozó Jordan-blokkok méretei az átlóban szereplő polinomokban a  $\lambda$  gyök multiplicitása.
  7. Adjuk meg a  $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  additív Abel-csoportban a  $H = \langle (2, -4, 3), (4, 1, 1), (0, 2, 2) \rangle$  részcsoporthoz izomorfiatípusát és faktorát.
  8. Határozzuk meg a  $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$  csoport  $H = \langle (1, 3, 2), (1, 1, 0) \rangle$  részcsoporthoz vett faktorcsoporthoz.
- Hf1.** Keressünk  $A_4$ -nek  $\mathbb{C}$  fölött 1-nél nagyobb dimenziós irreducibilis reprezentációját!
- Hf2.** Lássuk be, hogy egy  $R$  1-elemes gyűrű centrumának minden nilpotens eleme benne van  $J(R)$ -ben. Mutassunk olyan elemet az  $S_3$  szimmetrikus csoport 2 elemű test fölötti csoportalgebrájában, amely nilpotens ugyan, de nincs benne a Jacobson-radikálban.