1. Bizonyítsuk be, hogy ha R egy D ferdetest fölötti $n \times n$-es mátrixok gyűrűje, akkor R centruma, $Z(R) := \{ r \in R \,|\, rx = xr \ \forall\ x \in R \}$ a $\lambda \cdot I$ alakú mátrixokból áll, ahol $\lambda \in Z(D)$.

2. Féligegyszerű gyűrű részgyűrűje, ideálja, faktorgyűrűje féligegyszerű-e?

Egy egységelemes R gyűrű *Jacobson-radikáljának* nevezzük, és $J(R)$-rel jelöljük az R maximális jobbideáljainak metszetét.

3. Lássuk be, hogy egy R gyűrűben egy a elem akkor és csak akkor van benne egy nilpotens jobbideálban, ha egy nilpotens balideálban is benne van.

4. Legyen R egységelemes gyűrű, amely minimum- és maximumfeltételes a jobbideálokra nézve. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások ekvivalensek R tetszőleges J jobbideáljára.

(i) J nilpotens;
(ii) J annullál minden egyszerű jobb R-modulust;
(iii) minden véges kompozícióláncú jobb R-modulust annullál J-nek egy alkalmas hatványa.

5. Bizonyítsuk be, hogy a 3. feladat feltételei mellett $J(R)$ az R legnagyobb nilpotens jobbideálja, azaz $J(R)$ maga nilpotens, és tartalmaz minden nilpotens jobbideált.

6. Bizonyítsuk be, hogy egy R 1-elemes jobb-Artin gyűrűben a Jacobson-radikál ideál, és ugyanezt az ideált kapnánk, ha maximális balideálok metszeteként definiálnánk.

7. Bizonyítsuk be, hogy egy 1-elemes jobb-Artin gyűrűnek a Jacobson-radikállal vett faktora féligegyszerű.

8. Bontsuk föl mátrixgyűrűk direkt összegére a $\mathbb{C}C_4$ és az $\mathbb{F}_2C_3$ csoportalgebrákat!

9. Keressük meg a $\mathbb{F}_2C_4$ csoportalgebra összes ideálját! Mi az algebra Jacobson-radikálja?

Hf1. Legyen R a H halmaz részhalmazain definiált Boole-gyűrű, tehát a szorzás a metszet, az összeadás a szimmetrikus differencia. Bizonyítsuk be, hogy R akkor és csak akkor féligegyszerű, ha H véges.

Hf2. Bizonyítsuk be, hogy a KG csoportalgebra centruma a teljes konjugáltosztály-összegek lineáris kombinációiból áll.

Hf3. Felbontható-e az $\mathbb{F}_2S_3$ csoportalgebra valódi ideáljainak, illetve részmodulusainak direkt összegére?