A feladatokban a gyűrűk egységelemesek, a modulusok unitérek.

1. Írjuk le a 2×2-es valós mátrixok gyűrűjében a a jobbideálokat. Tegyük meg ugyanezt a fölső háromszögmátrixok gyűrűjére is.

2. Legyen M egy végesen generált $\mathbb{C}[x]$-modulus.

a) Bizonyítsuk be, hogy M komplex vektortér, amelyen az x-szel való szorzás lineáris transzformációként hat.
b) Mik az M részmodulusai?
c) Mik az M egyszerű részmodulusai?
d) Melyek a féligegyszerű $\mathbb{C}[x]$-modulusok?

3. Mi a kategóriaelméleti szorzat és koszorzat az Abel-csoportok körében? Mi a szorzat a csoportok körében? Bizonyítsuk be, hogy egy A és B csoport koszorzata a csoportok körében a szabad szorzatuk, vagyis az a csoport, amelynek elemei $a_1b_1a_2b_2\cdots a_nb_n$ alakú szavak ($a_i \in A$, $b_i \in B$), és a szorzatukban egyszerűsíteni csak szomszédos azonos komponensbelieket lehet, illetve az 1-et bármivel.

4*. Tudjuk, hogy $\mathbb{Z}[x]$ minden ideálja végesen generált, de nem főideálgyűrű. Van-e minden n természetes számhoz olyan ideál $\mathbb{Z}[x]$-ben, amelyet n elemmel lehet generálni, de kevesebbel nem?

5. Legyen V egy megszámlálhatóan végtelen dimenziós vektortér, és $E = \operatorname{End}(V)$ a V lineáris transzformációinak gyűrűje. Bizonyítsuk be, hogy a véges rangú transzformációk egy I ideált alkotnak E-ben, és az $R = E/I$ gyűrű egyszerű, de R_R nem maximumfeltételes, és nem is minimumfeltételes.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha R_R maximumfeltételes, akkor minden végesen generált M_R modulus is maximumfeltételes.

7. Legyen $E = \operatorname{End}(M)$ egy M modulus önmagába menő homomorfizmusainak (endomorfizmusainak) gyűrűje. Bizonyítsuk be, hogy

a) E_E-nek, illetve ${}_EE$-nek akkor és csak akkor van nem triviális direkt felbontása, ha M-nek van;
b) $\operatorname{End}({}_RR) \cong R$.

8. Mutassuk meg, hogy ha egy R kommutatív nullosztómentes gyűrű minimumfeltételes, akkor R test.

9. Legyen R (kommutatív) Noether-gyűrű, $I \lhd R$, és tegyük föl, hogy az I-beli elemek nilpotensek. Mutassuk meg, hogy van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $I^n = 0$.

Hf1. Legyenek A, B és C részmodulusok az M modulusban, és tegyük föl, hogy $A \geq C$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $A \cap (B + C) = (A \cap B) + C$.

Hf2. Legyen $R = A \oplus B$ az A és B gyűrűk direkt összege. Bizonyítsuk be, hogy R minden ideálja $A_1 \oplus B_1$ alakú, ahol $A_1 \lhd A$ és $B_1 \lhd B$.

Hf3. Legyen M egy minimum- és maximumfeltételes modulus, és $f : M \to M$ endomorfizmus. Bizonyítsuk be, hogy van olyan n, amelyre $M = \operatorname{Ker} f^n \oplus \operatorname{Im} f^n$. (Útmutatás: tekintsük a $\operatorname{Ker} f \leq \operatorname{Ker} f^2 \leq \ldots$ és $\operatorname{Im} f \geq \operatorname{Im} f^2 \geq \ldots$ modulusláncokat.)