1. Legyenek $K \leq L$ testek. A $t_1, \dots, t_n \in L$ elemek algebrailag függetlenek K fölött, ha nincs olyan $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ nem nulla polinom, amelyre $f(t_1, \dots, t_n) = 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor
a) $K \leq K(t_1) \leq K(t_1, t_2) \leq \dots \leq K(t_1, \dots, t_n) = M$ transzcendens bővítések sorozata;
b) a $t_1, \dots, t_n$ elemek bármely permutációja kiterjeszthető M-nek K fölötti automorfizmusává.

2. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{F}_p$ algebrai lezártja megszámlálható számosságú.

3. Tegyük fel, hogy $L|K$ algebrai és normális, és hogy minden $f(x) \in K[x]$ polinomnak van gyöke L-ben. Bizonyítsuk be, hogy ekkor L a K algebrai lezártja.

4. Legyen M baloldali R-modulus, B balideálja, J jobbideálja R-nek, $a \in M$ és U, V részmodulusok M-ben. Az alábbiak közül melyikek lesznek feltétlenül részmodulusai M-nek? (Az összegek komplexusösszegeket, a szorzatok a komplexusszorzat elemeiből alkotott összegek hamazát jelentik, Ann pedig az adott jobb-, illetve balmodulust 0-ba szorzó R-beli elemek halmaza.)

a) Ra	b) Ba	c) Ja	d) $U \cap V$	e) $U \cup V$
f) $U + V$	g) $\mathrm{Ann}_M(B)$	h) $\mathrm{Ann}_M(J)$	i) BU	j) JU.

5. Mi lehet a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_3$, illetve $\mathbb{Z}_6$ gyűrűk fölötti (unitér) modulusok additív csoportja? Izomorfia erejéig hány 15 elemű modulus van az egyes gyűrűk fölött?

6. Legyen $V = \mathbb{R}^n$ az $\mathbb{R}$ fölötti n-dimenziós vektortér. Keressünk alkalmas S részgyűrűt az $n \times n$-es valós mátrixok gyűrűjében, hogy a szokásos mátrix-vektor szorzásra nézve V egyetlen nemtriviális S-részmodulusa
a) $U = \{(x_1, \dots, x_n) \in V \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$, illetve
b) $U = \{(x, \dots, x) \in V \mid x \in \mathbb{R}\}$ legyen.

7. Legyen N részmodulusa az M bal R-modulusnak. Bizonyítsuk be, hogy létezik M-ben egy maximális U részmodulus, amelyre $N \cap U = 0$, és hogy ekkor M minden nem triviális részmodulusa nemtriviálisan metszi az $N \oplus U$ modulust. Mutassunk példát az Abelcsoportok között arra, hogy $N \oplus U$ nem feltétlenül az egész M.

Hf1. Bizonyítsuk be, hogy ha $K \leq K(\alpha) \leq K(\alpha, \beta)$ transzcendens bővítések, akkor $K \leq K(\beta) \leq K(\beta, \alpha)$ is transzcendensek.

Hf2. Legyen

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{és} \quad R = \left\{ \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy M jobbmodulus R fölött (a természetes mátrixszorzással), és hogy M-nek egyetlen valódi részmodulusa van.

Hf3. Legyen M jobb R-modulus. Bizonyítsuk be, hogy M annullátora R-ben, azaz $Ann_R(M) = \{ r \in R \mid mr = 0 \ \forall\ m \in M \}$ kétoldali ideálja R-nek.