

1. Megszerkeszthető-e egy egyenlőszárú háromszög, ha adott a szára és a beírt kör sugara?
2. Legyen K egy 0 karakterisztikájú test, amely tartalmazza az n -edik egységgyököket, és $L|K$ normális, n -edfokú bővítés. Bizonyítsuk be, hogy $\text{Gal}(L|K)$ akkor és csak akkor ciklikus, ha $L = K(\sqrt[n]{a})$ valamely $a \in K$ -ra. A "csak akkor" irányhoz használjuk a következő útmutatást:
 - a) Ha $L = K(\alpha)$, $\text{Gal}(L|K) = G = \langle g \rangle$, és ε primitív n -edik egységgyök, akkor α képei g hatványaival: $\alpha = \alpha_1 \mapsto \alpha_2 \mapsto \alpha_3 \mapsto \dots \mapsto \alpha_n \mapsto \alpha_1$, ahol α_i -k mind különbözők.
 - b) Van olyan j , hogy $\beta := \alpha_1^j + \varepsilon \alpha_2^j + \dots + \varepsilon^{n-1} \alpha_n^j \neq 0$.
 - c) g hatása β -n: $\beta \mapsto \beta \varepsilon^{-1} \mapsto \beta \varepsilon^{-2} \mapsto \dots \mapsto \beta \varepsilon^{-n+1} \mapsto \beta$.
 - d) $\prod_{i=0}^{n-1} (x - \beta \varepsilon^{-i}) \in K[x]$, és a konstans tagja $\pm \beta^n$, így $\beta^n \in K$.
 - e) $(K(\beta) : K) = n$, és $K(\beta) \leq L$, így $L = K(\beta)$.
3. Tudjuk, hogy $\mathbb{Q}(\cos 40^\circ)$ Galois-csoportja 3-elemű. Melyik racionális szám köbgyökével való bővítés adja ugyanezt a testet?
4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ polinom Galois-csoportja kommutatív, akkor a Galois-csoport rendje $\deg f$.
5. Az alábbiak közül melyik polinomok gyökeit lehet az alapműveletek és gyökvonás segítségével felírni?
 - a) $x^4 + 2x^3 - 5x + 1$
 - b) $x^5 - 15x^4 + 6$
 - c) $x^5 + 5x + 10$
 - d) $x^6 - 2x^2 + 4$
6. Bizonyítsuk be, hogy $a, b \in \mathbb{R}$ -re $a + bi$ algebrai akkor és csak akkor, ha a és b algebrai.
7. Milyen n -re lesz $\cos \frac{2\pi}{n}$ racionális?
8. Van-e a komplex egységkörön olyan algebrai szám, amelyik nem egységgyök?
9. Bizonyítsuk be a Gelfand–Schneider-tétel segítségével, hogy ha n olyan pozitív egész szám, amely nem 10-hatvány, akkor $\log_{10} n$ transzcendens.