1. Legyen α az $x^2 - x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ polinom egyik gyöke.

a) Hány dimenziós $\mathbb{Q}(\alpha)$ mint $\mathbb{Q}$ fölötti vektortér?
b) Bizonyítsuk be, hogy α^7 és α lineárisan összefüggnek ebben a vektortérben.

2. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2) \cong \mathbb{Q}[x]/(x^2 - 2x - 1)$.

3. Hányadfokú a $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$, illetve a $\mathbb{Q}(i + \sqrt{3})$ bővítés $\mathbb{Q}$ fölött?

4. Adjuk meg $\cos 20°$ minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ fölött.

5. Számítsuk ki a következő testbővítések fokait $\mathbb{Q}$ fölött!

a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ b) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ c) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$ d) $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ e) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} + \sqrt{2})$

6. Legyen α az $x^3 - 2x^2 + x + 1$ polinom egyik gyöke. Adjuk meg $\alpha^2 + 2$ reciprokát α legföljebb másodfokú polinomjaként!

7. Hányadfokú az F/K bővítés, ha F az f felbontási teste, és

a) $K = \mathbb{Q}$, $f = x^6 - 1$ b) $K = \mathbb{Q}$, $f = x^6 - 2$
c) $K = GF(7)$, $f = x^6 - 1$ d) $K = GF(5)$, $f = x^6 - 2$

8. Legyen $f(x) = x^4 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$. Irreducibilis-e ez a polinom? Ha $f(\theta) = 0$, ahol θ az f felbontási testének eleme, akkor mennyi lehet θ rendje a test multiplikatív csoportjában?

9. Lássuk be, hogy ha $L|K$ algebrai testbővítés, és az R gyűrűre $K \leq R \leq L$, akkor R test!

10. Mutassuk meg, hogy minden másodfokú bővítés normális.

11. Mutassuk meg, hogy ha p prím, akkor $x^{p^n} - x$ az összes olyan $GF(p)$ fölötti irreducibilis polinom szorzata, amelynek foka n-nek osztója.

12. Legyen K tetszőleges test, $K(t)$ pedig K-nak egy egyszerű transzcendens bővítése. Legyen $K < M \leq K(t)$. Bizonyítsuk be, hogy $K(t)$ algebrai bővítése M-nek.

Hf1. Határozzuk meg a $\mathbb{Q}(\sqrt{3 - \sqrt{2}})$ testbővítés fokát $\mathbb{Q}$ fölött!

Hf2. Legyen $K = \mathbb{F}_2(\alpha)$ a kételemű testnek az $x^4 + x + 1 \in$ polinom α gyökével való bővítése. Ebben a 16-elemű testben az $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ polinom is szükségképpen lineáris faktorokra bomlik. Adjuk meg az $f(x)$ összes gyökét α legföljebb harmadfokú polinomjaként!

Hf3. Tegyük fel, hogy $\alpha, \beta \in L$ elemekre $\alpha + \beta$ algebrai, $\alpha\beta$ pedig transzcendens a K résztest fölött. Hány lehet algebrai az α, β és $\alpha^2 + \alpha$ közül?