Feladatmegoldó szeminárium 2.
12. óra
2015. 05. 04. / 06.

1. Egy 21 fős osztályban a diákok klubokat alakítanak. Bizonyítsuk be, hogy ha bármely két klubnak pontosan 1 közös tagja van, akkor legfeljebb 21 klub lehet az osztályban.

2. A síkon négy rozsomák egyenes vonalú egyenletes mozgást végez. Tudjuk róluk, hogy sebességvektoraik különbözőek, és a hat lehetséges találkozás közül öt már létrejött. Mutassuk meg, hogy a hatodik is létre fog jönni.

3. Létezik-e olyan $f(x)$ valós függvény, hogy $\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$ minden $x > 0$-ra, amint n a pozitív egészek mentén tart ∞-hez, de $\lim_{x\to\infty} f(x) \neq 0$?

4. Mutassunk olyan kétváltozós valós polinomot, amelynek minden értéke pozitív, mégis tetszőlegesen közel kerül a 0-hoz.

5. Egy kaszinóban különböző kártyakeverő-gépeket használnak az 52 lapos francia kártya keveréséhez. Egy adott gép egy adott sorrendben cseréli meg a beadott teljes pakliban a kártyák sorrendjét. A kaszinó vezetősége takarékossági okokból minél kevesebb gépet akar üzemeltetni, de azért tetszőleges keverést meg kell tudniuk valósítani.

   (a) Bizonyítsuk be, hogy egy darab gép nem tudja elvégezni ezt a feladatot.

   (b) Mutassuk meg, hogy található két olyan gép, amelyekkel együtt minden lehetséges keverés előállítható.

6. Az a_n valós számsorozat *szubadditív*, ha

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

   Bizonyítsuk be, hogy ha a_n szubadditív, akkor $\frac{a_n}{n}$ konvergens (esetleg $-\infty$-hez tart).

<u>Beadandó feladatok</u>

34. Bizonyítsuk be, hogy minden m pozitív egészhez létezik olyan x pozitív egész, hogy m osztója az $x+1, x^x+1, x^{x^x}+1, \ldots$ számok mindegyikének. (3 pont)

35. Egy n fős városban különböző klubok alakultak. Két klub tagsága nem lehet teljesen megegyező. Minden klubnak páratlan sok tagja van, és bármely két klub közös tagjainak száma páros. Hány klub lehet legfeljebb a városban? (3 pont)

36. Az f *folytonos* függvényre teljesül, hogy bármely $x > 0$ számra $\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$ (n a pozitív egészeken fut végig). Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. (5 pont)