Feladatmegoldó szeminárium 2.
10. óra
2015. 04. 20–22.

1. Az alábbiak közül melyik prímszám?

$$101, 10101, 1010101, \ldots$$

2. Bizonyítsuk be, hogy ha az A négyzetes mátrixra $A = A^2$, akkor A minden sajátértéke 0 vagy 1. Igaz-e az állítás visszafelé?

3. Legyen a_n pozitív számokból álló csökkenő sorozat. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty,$$

akkor

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0.$$

4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy csoportban minden elem másodrendű, akkor a csoport kommutatív.

5. Az f valós függvény olyan, hogy $f^2, f^3, f^4, \ldots$ mindegyike polinom. Bizonyítsuk be, hogy ekkor f is az.

6. Milyen $x_0 > 0$ esetén konvergens az $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{100}{x_n}\right)$ számsorozat és hová tart? (Mi a helyzet negatív x_0 esetén? Piros pontért: mi a helyzet komplex x_0 esetén?)

Beadandó feladatok

28. Legyen n pozitív egész. Hány megoldása van az alábbi egyenletnek a $(0, \frac{\pi}{2})$ intervallumban?

$$\underbrace{\cos(\cos(\ldots(\cos x)\ldots))}_{n \text{ darab} \cos} = x$$

(3 pont)

29. Legyen $A = (a_{ij})$ tetszőleges mátrix és a $B = (b_{ij})$ mátrixra $b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$. Bizonyítsuk be, hogy $\det A = \det B$. (3 pont)

30. Legyen adott egy véges, csupa 0 és 1 jegyekből álló számsorozat (0-val is kezdődhet). Jelölje a_n azt a számot, amit úgy kapunk, hogy ezt a számot n példányban leírjuk egymás mellé és összeolvassuk (pl. az órai feladat a 01 sorozatnak felel meg). Bizonyítsuk be, hogy $n \geq 3$ esetén a_n összetett. (5 pont)