Feladatmegoldó szeminárium 2.
9. óra
2015. 04. 08. / 13.

1. Bizonyítsd be, hogy egy üres rácsháromszög területe 1/2!

2. Mutassuk meg, hogy a

$$\begin{array}{rl} & 0.1 \\ + & 0.01 \\ + & 0.002 \\ + & 0.0003 \\ + & 0.00005 \\ + & 0.000008 \\ + & 0.0000013 \\ & \vdots \end{array}$$

   végtelen összeg racionális számhoz konvergál. Mennyi ez a szám?

3. Van-e olyan folytonos függvény, amely minden lokális szélsőértékét 2-szer veszi fel?

4. Adott 11 pozitív egész szám, melyek minden prímosztója legfeljebb 30. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük néhány, melyek szorzata négyzetszám.

5. Legyenek A, B és C tetszőleges $n \times n$-es mátrixok.
   (a) Mutassuk meg, hogy $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, ahol tr a mátrix nyomát jelenti, vagyis a főátlóban található elemek összegét.
   (b) Adjunk példát arra, hogy a fenti összefüggés három mátrix tetszőleges permutációjára már nem teljesül, vagyis $\mathrm{tr}(ABC) \neq \mathrm{tr}(ACB)$.

6. Legyen a és d pozitív számok, jelölje az $a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n+1)d$ számok számtani közepét A_n, mértani közepüket G_n. Igazoljuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_n}{A_n} = \frac{2}{e}.$$

<u>Beadandó feladatok</u>

25. Legyen $f(x) = \sin(\cos(\sin(\cos(\ldots \cos x)\ldots))))$, ahol összesen 5 sin és 5 cos szerepel felváltva a kifejezésben. Bizonyítsuk be, hogy $|f(\frac{1}{5}) - f(\frac{1}{10})| \leq \frac{1}{10}$. (3 pont)

26. Adott 11 pozitív egész, melyekről tudjuk, hogy minden prímtényezőjük legfeljebb 30. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható közülük $a_1, a_2, \ldots, a_k$ és hozzájuk $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ számok, melyek értéke 1 vagy 2 úgy, hogy az $a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} \ldots a_k^{\beta_k}$ szorzat köbszám. (3 pont)

27. Számítsuk ki az $a_n = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{e}\right]^n$ sorozat határértékét. (5 pont)