Feladatmegoldó szeminárium 2.
8. óra
2015. március 30./ április 1.

1. Egy országban bármely városból legfeljebb 3 repülőjárat indul (a járatok oda-vissza közlekednek). Bármely városból bármely másikba el lehet jutni repülővel legfeljebb egy átszállással. Legfeljebb hány város lehet összesen az országban?

2. Tekintsük az
$$A_n := \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$
összeggel definiált számsorozatot.
   (a) Mutassuk meg, hogy alulról és felülről is korlátos.
   (b) Mutassuk meg, hogy konvergens, és számítsuk ki $\lim_{n\to\infty} A_n$ értékét.

3. Dobunk egy szabályos piros dobókockával, és ezután annyi szabályos kék kockával, amennyi a piros dobás eredménye. Mi lesz a kék kockával dobott számok összegének generátorfüggvénye? Mi a kék kockával dobott számok összegének a várható értéke?

4. A 4×2-es és B 2×4-es mátrixok, melyekre
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$
Adjuk meg a BA mátrixot.

5. Bontsuk fel a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sort (megszámlálható) végtelen sok divergens sor összegére.

<u>Beadandó feladatok</u>

22. Tegyük fel, hogy az A, B $n \times n$-es mátrixokra teljesül $AB + A + B = 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $AB = BA$. (3 pont)

23. Az $f(x)$ egész együtthatós polinom legalább 4 különböző egész helyen felveszi az 1-et. Bizonyítsuk be, hogy ekkor egész helyen nem veszi fel a -1-et. (3 pont)

24. Jelölje $d(n)$ az n szám pozitív egész osztóinak számát, és legyen
$$a(n) = \sum_{i=1}^{n} d(i).$$
Mennyi a_n aszimptotikusan? (5 pont)