Feladatmegoldó szeminárium 2.
6. óra
2015. március 16./március 18.

1. a, b, c, d egész számok, d nem osztható 11-gyel. Tegyük fel, hogy az

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv 0 \,(\mathrm{mod} 11)$$

kongruenciának van megoldása. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a

$$dx^3 + cx^2 + bx + a \equiv 0 \,(\mathrm{mod} 11)$$

kongruenciának is van megoldása.

2. (Rendezési tétel.) Legyenek $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ és $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_n$ valós számok, és $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ egy permutáció. Bizonyítsuk be, hogy

$$a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1 \le a_1b_{\pi(1)} + a_2b_{\pi(2)} + \cdots + a_nb_{\pi(n)} \le a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

3. A Cantor-halmazt a következő módon definiáljuk: a $[0, 1]$ intervallumból indulunk ki; először hagyjuk el az $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ nyílt intervallumot. Ezután hagyjuk el a megmaradó 2 intervallum mindegyikéből a középső nyílt egyharmadukat, és ezt folytassuk végtelen sok lépésen keresztül. A megmaradó ponthalmaz a Cantor-halmaz.

   (a) Mutassuk meg, hogy a Cantor-halmaz „összhossza” 0, azaz lefedhető véges sok tetszőlegesen kis összhosszúságú intervallummal.

   (b) Mutassuk meg, hogy a Cantor-halmaz számossága kontinuum.

4. Legyen $x_0 \in [0, 1]$ és $x_n = f(x_{n-1})$, ahol

$$f(x) = x + \frac{1}{10}\sin(\pi x).$$

Hová konvergál x_n, amint $n \to \infty$?

Beadandó feladatok

16. Legyen $A_1A_2 \ldots A_{10}$ egy szabályos tízszög. Bizonyítsuk be, hogy a körülírt körének sugara megegyezik $|A_1A_4| - |A_1A_2|$-vel. (3 pont)

17. m, n pozitív egészek, f valós függvény, és tegyük fel, hogy $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{m}$-nek és $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}$-nek x_0 egyaránt fixpontja. Milyen (m, n) párokra következik ebből, hogy x_0 f-nek is fixpontja? (3 pont)

18. Mutassuk meg, hogy minden $x \in [0, 2]$ szám felírható $y + z$ alakban, ahol y és z a Cantor-halmaz elemei. (5 pont)

1\. zh 2015. március 23-án, hétfőn 17 órától a K150 teremben.