Feladatmegoldó szeminárium 2.
5. óra
2015. március 9./március 11.

1. Van 8 elemem, amiből 4 jó és 4 rossz, de nem tudom, melyik milyen. A walkman-em 2 jó elemmel működik. Minimum hány próbálkozásra van szükség, hogy a walkman-emet megszólaltassam?

2. (a) Létezik-e olyan H halmaz a síkban, melynek létezik önmagával egybevágó valódi részhalmaza?

   (b) Létezik-e olyan H korlátos halmaz a síkban, melynek létezik önmagával egybevágó valódi részhalmaza?

   (c*) Létezik-e olyan H korlátos, zárt halmaz a síkban, melynek létezik önmagával egybevágó valódi részhalmaza?

3. Legyen $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ akár komplex együtthatós polinom, melyre $|a_i| \leq 1$ $(0 \leq i \leq n-1)$. Mutassuk meg, hogy ekkor $p(z)$ minden gyöke kisebb, mint 2 abszolútértékű.

4. Hány szabályos 3-dimenziós test van?

5. Egy bábu 1-ről indul és mindig annyit lép, ahányat egy dobókockával dobunk. Mekkora valószínűséggel lép rá a 100-ra?

6. Tekintsük azt a sorozatot, melyre $a_0 = 1$, továbbá $a_{2n+1} = a_n$ és $a_{2n+2} = a_n + a_{n+1}$ teljesül minden $n \geq 0$ számra. Bizonyítsuk be, hogy az
$$\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} : n \geq 0 \right\}$$
halmazban valamennyi pozitív racionális szám pontosan egyszer fordul elő.

<u>Beadandó feladatok</u>

13. (a) Egy 10 fős társaság egy este több ultipartit is lebonyolított (az ultit 3-an játsszák). Tudjuk, hogy egy hármas legfeljebb egy partit játszott, és semelyik két partiban nem volt két közös résztvevő. Bizonyítsuk be, hogy legfeljebb 15 partit játszottak. (3 pont)

    (b) Adjunk éles felső korlátot arra, hogy legfeljebb hány partit játszottak. (+1 pont)

14. Adott két szabályos tetraéder az oldalaikon rendre 1,2,3,4 számokkal (minden oldal azonos eséllyel jöhet ki, és az alsó lap számít az eredménynek). Készítsünk két ezektől eltérő "dobótetraédert", melyeknek az oldalaira szintén pozitív egész számok vannak írva, minden oldalukra egyforma valószínűséggel esnek és a velük dobott számok összege ugyanúgy viselkedik, mint a fenti két dobótetraéder esetén. (3 pont)

15. Bizonyítsuk be, hogy 6-nél nagyobb oldalszámú konvewwwwwwwwwx sokszögekkel nem lehet parkettázni a síkot! (5 pont)