Feladatmegoldó szeminárium 2.
3. óra
2015. február 23./február 25.

1. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges konvex négyszög egybevágó példányaival kiparkettázható a sík (hézag és átfedés nélkül).

2. Pozitív-e az alábbi végtelen szorzat értéke? Adjuk meg a pontos értékét.

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

3. Tegyük fel, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ($a_n, a \in \mathbb{R}$). Bizonyítsuk be, hogy ekkor a

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

sorozat is konvergens és $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

4. Beírhatóak-e a végtelen negyedsíkrács mezőibe a pozitív egész számok úgy, hogy minden mezőbe írunk számot, minden pozitív egészt pontosan egyszer írunk be és ha a és b egy sorban vagy egy oszlopban van, akkor az egyik osztója a másiknak?

5. $$\sum_{k=0}^{671}\binom{2015}{3k} = ?$$

6. (a) Van-e olyan mindenhol értelmezett, szigorúan monoton növő valós függvény, amely csak racionális értékeket vesz fel?
   (b) Van-e olyan mindenhol értelmezett, szigorúan monoton növő valós függvény, amely csak irracionális értékeket vesz fel?

<u>Beadandó feladatok</u>

7. Parkettázható-a a sík hézag és átfedés nélkül egységnyi oldalú szabályos ötszögekkel és tízszögekkel? (3 pont)

8. Egy 5 egység hossú kukac pihen a számegyenesen a $[0, 5]$ ingervallumon. Némi tekergés után már a $[0, 1]$-en van. Bizonyítsuk be, hogy van a kukacnak olyan pontja, amely a számegyenes ugyanazon pontja felett helyezkedik el a két esetben. (3 pont)

9. Tegyük fel, hogy az $a_n > 0$ számsorozatra teljesül

$$a_n < a_{n-1} + \frac{1}{2^n}, \quad n \geq 2.$$

Bizonyítsuk be, hogy az a_n sorozat konvergens. (5 pont)