Feladatmegoldó szeminárium 2.

2. óra

2015. február 16./február 18.

1. Adott egy véges, zárt I intervallum, és egy $f : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Bizonyítsuk be, hogy ha $I \subseteq f(I)$, akkor f-nek van fixpontja.

2. (a) (Kondenzációs kritérium.) Legyen a_n pozitív számokból álló csökkenő számsorozat. Bizonyítsuk be, hogy
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} < \infty.$$
   (b) Konvergens-e
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)}?$$
   (c) Konvergens-e
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}?$$

3. (a) Bizonyítsuk be, hogy a számegyenes minden racionális száma fölé emelhető egy-egy T betű úgy, hogy azok nem metszik egymást.
   (b) Mutassuk meg, hogy az összes valós szám fölé viszont nem rajzolhatók egymást nem metsző T betűk.

4. Legyenek $k \le n$ pozitív egészek. Mutassuk meg, hogy $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \le 1 + \frac{ke}{n}$!

5. n játékos tournamentet játszik, azaz mindenki mindenkivel játszik pontosan egy mérkőzést. Minden egyes mérkőzésnek egy győztese van, döntetlen nincs. (Azaz a tournament egy teljes irányított gráf.) Pszeudogyőztesnek hívunk egy A játékost, ha teljesül, hogy minden egyes más B játékosra vagy A legyőzte B-t, vagy van olyan C, hogy A legyőzte C-t és C legyőzte B-t (azaz A legfeljebb kettő hosszú úton keresztül megvert mindenkit).

   Bizonyítsuk be, hogy mindig van legalább egy pszeudogyőztes!

6. Jelölje $a(R)$ azon (x, y) rácspontok számát a síkon, melyekre $x^2 + y^2 \le R^2$. Mennyi $a(R)$ aszimptotikusan, amint $R \to \infty$?

Beadandó feladatok

4. Tekintsünk egy $n \times n \times n$-es (3 dimenziós) „sakktáblát”, melynek egyik sarokkockájában egy huszár áll. A huszár minden lépésben egyik irányban 2, másik irányban 1, harmadik irányban pedig 0 mezővel léphet arrébb (ahogy a hagyományos sakkban is). Határozzuk meg, mennyi a minimális lépésszám, amivel elérheti az átellenes sarkot (vagyis azt, ahová a kocka testátlója vezet). (3 pont)

5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n részvevős tournamentben csak egyetlen pszeudogyőztes van, akkor ő abszolút győztes is, azaz mindenki mást legyőzött. (3 pont)

6. Legyen α rögzített 1-nél nagyobb irracionális szám, és legyen β olyan, hogy $1/\alpha + 1/\beta = 1$. Bizonyítsuk be, hogy az $\lfloor n\alpha \rfloor$, $\lfloor n\beta \rfloor$ számok egyszeresen lefedik az összes pozitív egészt. (5 pont)