Feladatmegoldó szeminárium 2.
1. óra
2015. 02. 09-11.

1. $$\sum_{k=0}^{1007} \binom{2015}{2k} = ?$$

   (És mi a helyzet 2016-ra?)

2. Legalább hány lépés szükséges ahhoz, hogy egy huszár egy 101×101-es sakktábla bal fölső mezőjéből a jobb alsóba jusson?

3. Az f folytonos függvény a teljes számegyenesen értelmezett, és teljesül rá

   $$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

   Bizonyítsuk be, hogy ekkor $f(x) = cx$ alkalmas c-vel. (Ez a Cauchy-függvényegyenlet.)

4. Lineárisan független rendszert alkotnak-e az alábbi függvények a valós függvények vektorterében?

   (a) $1, \cos^2 x, \cos(2x)$

   (b) $1, \sin x, \cos x$

5. Adott egy véges, zárt I intervallum, és egy $f : I \to I$ folytonos függvény. Bizonyítsuk be, hogy f-nek van fixpontja.

6. Legyen a_n pozitív elemű sorozat. Igazoljuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pontosan akkor véges, ha $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ véges.

Beadandó feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy a $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ csoportnak nincs véges generátorrendszere. (Egy $A \subseteq Q$ halmaz generátorrendszer, ha $\mathbb{Q}$ minden eleme előáll véges sok, nem feltétlenül különböző A-beli elem előjeles összegeként.) (3 pont)

2. Adjunk kombinatorikai jelentést a

   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

   azonosság két oldalának, majd igazoljuk az állítást. (3 pont)

3. Adjunk meg olyan 0–1-mátrixokat, amelyeknek exponenciálisan nő a determinánsa. Vagyis mutassunk minden n-re olyan $n \times n$-es A_n mátrixot, amelynek csak 0-k és 1-esek az elemei, és $\det A_n > d \cdot c^n$ valamely $c > 1$ és $d > 0$ számokkal. (5 pont)