Környezetmérnök MatA3 fakultatív gyakorlat – feladatok a 2. anyagrészhez

7. 2 × 2-ES HOMOGÉN LINEÁRIS RENDSZEREK

Elméleti tudnivalók

A KDE-rendszer:

$$\underline{\dot{x}}(t) = A\underline{x}(t), \quad \text{azaz} \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

ahol A adott 2×2-es valós mátrix.

Az általános megoldás a következőképpen kapható meg. Legyenek λ_1 és λ_2 az A sajátértékei.

(i) Ha $\lambda_1 \neq \lambda_2$ valós. Legyenek $\underline{u}, \underline{v}$ ezekhez tartozó sajátvektorok, azaz $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ nemnulla-vektorok úgy, hogy $A\underline{u} = \lambda_1 \underline{u}, \quad A\underline{v} = \lambda_2 \underline{v}$. Ekkor

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{u} + c_2 e^{\lambda_2 t} \underline{v} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ tetsz.})$$

(Megengedhető $\lambda_1 = \lambda_2$ is, ha van két független sajátvektor: ekkor ezek lesznek $\underline{u}$ és $\underline{v}$.)

(ii) Ha $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$, de csak egy független sajátvektor van. Legyen ez $\underline{u}$, azaz $\underline{u} \in \mathbb{R}^2$ nemnulla-vektor és $A\underline{u} = \lambda_1 \underline{u}$, valamint legyen $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ az $A\underline{v} = \lambda \underline{v} + \underline{u}$ egyenlet megoldása. Ekkor

$$\underline{x}(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t} \underline{u} + c_2 e^{\lambda t} \underline{v} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ tetsz.})$$

(iii) Ha $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ komplex sajátértékek ($\beta \neq 0$). Legyen $\underline{p}$ az $(\alpha + i\beta)$-hoz tartozó (komplex) sajátvektor, azaz $\underline{p} \in \mathbb{C}^2$ nemnulla-vektor, melyre $A\underline{p} = (\alpha + i\beta)\underline{p}$. Legyen $\underline{u} = Re\, \underline{p} \in \mathbb{R}^2$ és $\underline{v} = Im\, \underline{p} \in \mathbb{R}^2$, azaz $\underline{p} = \underline{u} + i\underline{v}$. Ekkor

$$\underline{x}(t) = r\, e^{\alpha t} \cos(\beta t - \varphi_0)\, \underline{u} - r\, e^{\alpha t} \sin(\beta t - \varphi_0)\, \underline{v} \qquad (r \geq 0,\ \varphi_0 \in [0, 2\pi) \in \mathbb{R} \text{ tetsz.})$$

Feladatok

1. Oldjuk meg a következő lineáris rendszereket:

$$a) \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 \end{cases} \qquad b) \begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - x_2 \end{cases} \qquad c) \begin{cases} \dot{x}_1 = \ \ 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 \end{cases}.$$

2. Oldjuk meg a fenti (a), (c) lineáris rendszereket az alábbi kezdeti feltétellel:

$$(a) \quad \begin{array}{l} x_1(0) = -1 \\ x_2(0) = \ \ 5 \end{array} \qquad (c) \quad \begin{array}{l} x_1(0) = 3 \\ x_2(0) = 0 \end{array}$$

Házi feladatok

1. Oldjuk meg a következő lineáris rendszereket!

$$a)\quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 8x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases} \qquad b)\quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + 4x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + 3x_2 \end{cases} \qquad c)\quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} .$$

2. Egy faj populációjának egyedszámát két élőhelyen az idő függvényében (folytonos közelítéssel) az $x(t)$ és $y(t)$ függvények írják le. Ha az első élőhelyen a faj az egyszerű növekedési modell szerint szaporodik, és mindkét irányban az egyedszámmal arányos migráció folyik, akkor az
$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = rx \end{cases}$$
rendszert kapjuk. Adjuk meg ennek általános megoldását az $a = r = 1$ és $b = 2$ együtthatók esetén! Mutassuk meg, hogy hosszú idő elteltével a két élőhelyen vett populációk hányadosa kb. állandó lesz!

3. Ha a fenti modellben a faj a második élőhelyen is az egyszerű növekedési modell szerint szaporodik, akkor az
$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = rx + sy \end{cases}$$
rendszert kapjuk. Adjuk meg ennek általános megoldását az $a = r = s = 1$ és $b = 2$ együtthatók esetén!

Elméleti tudnivalók

A 0 pont körüli kezdetiérték-feladat megoldását keressük a 0 pont körüli

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}\,x + \frac{y''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}\,x^3 + \dots$$

Taylor sorral, ha a differenciálegyenletből felírható egy rekurzió az $y^{(n)}(0)$ együtthatókra. A gyakorlatban a megoldást csak közelítjük Taylor-polinommal, amihez az első néhány együtthatót számítjuk ki a differenciálegyenlet ismételt deriválása segítségével.

Feladatok

1. Írjuk fel az $y'(x) = -y(x), \quad y(0) = 1$ feladat megoldásának hatványsorát!

2. Írjuk fel az y megoldás harmadfokú Taylor-polinomját a 0 pont körül:

   a) $y''(x) = y^2(x), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$

   b) $y'(x) = \sin 3x + 2\,e^{-y(x)}, \qquad y(0) = 0.$

Házi feladatok

3. Írjuk fel az y megoldás harmadfokú Taylor-polinomját a 0 pont körül:

   a) $y'(t) - y(t)\sin t = t, \qquad y(0) = 2;$

   b) $y''(x) = x\,y^2(x) - y'(x), \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$

4. Egy ℓ hosszú inga kitérésének szögét az idő függvényében a $\theta(t)$ függvény adja meg. A mozgásegyenletből az m tömeggel egyszerűsítve a $\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{\ell}\sin\theta(t) = 0$ egyenletet kapjuk. Jelölje $\omega := \sqrt{\frac{g}{\ell}}$. Függőleges helyzetből v sebességgel meglökve a $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = v$ kezdeti feltételeket kapjuk. Számítsuk ki ekkor a megoldást közelítő polinomot a t^3-ös tagig!

5. Egy kémiai reakcióban szereplő két anyag koncentrációját az idő függvényében az $u(t)$ és $v(t)$ függvények írják le. Ha a két anyag kölcsönhatásával arányosan az egyik anyag a másikba alakul, akkor az

   $$u'(t) = k\,u(t)\,v(t),$$
   $$v'(t) = -k\,u(t)\,v(t)$$

   egyenletrendszert kapjuk, ahol $k > 0$ állandó. Legyen $k = 1$ és $u(0) = v(0) = 1$. Számítsuk ki ekkor az $u(t)$ és $v(t)$ megoldásokat közelítő polinomot a t^3-ös tagig!

9. Laplace-transzformáció

Elméleti tudnivalók

A Laplace-transzformáció egy alkalmas integrállal definiált $f \stackrel{L}{\longmapsto} F$ függvénytranszformáció, amely lineáris. A főbb elemi függvények és a deriváltak transzformáltjai az alábbiak.
(Az értelmezési tartományokat nem írjuk ki, mindvégig a lehető legbővebben értjük.)

$f(t)$	$F(p)$
1	$\frac{1}{p}$
$e^{\alpha t}$ $(\alpha \in \mathbb{R}$ áll.)	$\frac{1}{p-\alpha}$
t^n $(n \in \mathbf{N}$ áll.)	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\cos bt$ $(b \in \mathbb{R}$ áll.)	$\frac{p}{p^2+b^2}$
$\sin bt$ $(b \in \mathbb{R}$ áll.)	$\frac{b}{p^2+b^2}$
$e^{at}\, t^n$ $(a \in \mathbb{R},\, n \in \mathbf{N}$ áll.)	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$e^{at} \cos bt$ $(a, b \in \mathbb{R}$ áll.)	$\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$
$e^{at} \sin bt$ $(a, b \in \mathbb{R}$ áll.)	$\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$
$f'(t)$	$p\,F(p) - f(0)$
$f''(t)$	$p^2 F(p) - p\,f(0) - f'(0)$
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \ldots - f^{n-1}(0)$

Feladatok

1. $F(p) = ?$, ha
   (a) $f(t) := 7\sin 3t - 5\cos 2t$, (b) $f(t) := 4e^{-2t}$,
   (c) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 1 \le t \le 2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$, (d) $f(t) := \delta_3(t)$.

2. $f(t) = ?$, ha
   (b) $F(p) = \frac{p+4}{p^2+9}$, (c) $F(p) = \frac{1}{p^2+2p+2}$, (c) $F(p) = \frac{p^2+3p+9}{p^3-27}$, (d) $F(p) = \frac{p+1}{p^3+1}$.
   (Az utóbbi kettőnél használjuk a $p^3 - q^3 = (p-q)(p^2+pq+q^2)$ azonosságot.)

3. Laplace-transzformáció segítségével oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat:
   (a) $y''(t) + 4y(t) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$,
   (b) $y'''(t) - 8y(t) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -2$.
   (c) $y''(t) + y(t) = \delta_2(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Házi feladatok

1. Laplace-transzformáció segítségével oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat:
   (a) $y''(t) + 9y(t) = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 5,$
   (b) $y'''(t) - 8y(t) = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 4.$
   (c) $y'''(t) + 8y(t) = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2.$
   (d) $y^{(4)}(t) - 9y(t) = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = -3.$
   (e) $y''(t) + y(t) = \delta_\pi(t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$
   (e) $y''(t) + y(t) = h(t), \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,$ ahol $h(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t \geq \pi \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$

10. Autonóm rendszerek fázisképe

Elméleti tudnivalók

Az $\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$ autonóm rendszer első integrálja olyan kétváltozós V függvény, melyre a rendszer bármely megoldása esetén $t \mapsto V(x(t),\, y(t)) \equiv$ állandó. A fázisképet V szintvonalainak ábrázolása adja a mozgás irányával együtt.

Feladatok

1. A következő autonóm rendszerek esetén adjuk meg az első integrált és vázoljuk fel a fázisképet:

$$a)\ \begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 1 \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} \dot{x} = 2 \\ \dot{y} = 3 \end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases} \dot{x} = 2 \\ \dot{y} = e^x \end{cases} \qquad f)\ \begin{cases} \dot{x} = e^y \\ \dot{y} = 2 \end{cases} \qquad g)\ \begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = \sin 3x \end{cases} \qquad h)\ \begin{cases} \dot{x} = -4y \\ \dot{y} = 3x \end{cases}$$

Autonóm rendszerek stabilitásvizsgálata

Elméleti tudnivalók

Most azt is feltesszük, hogy $(0,0)$ egyensúlyi pont, azaz $x(t) \equiv y(t) \equiv 0$ konstans megoldás. Ennek stabilitását vizsgáljuk.

Ljapunov-módszer: alkalmas $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ segédfüggvényt keresünk (ennek változóit is x, y-nal jelöljük). A Ljapunov-tétel szerint a stabilitást a

$$V'(x,y) \cdot f(x,y) = \partial_x V(x,y)\, f_1(x,y) + \partial_y V(x,y)\, f_2(x,y)$$

skalárszorzat előjeléből láthatjuk az alábbiak szerint:

- ha $V'(x,y) \cdot f(x,y) < 0 \quad (\forall (x,y) \neq (0,0))$, akkor a $(0,0)$ egyensúlyi pont aszimptotikusan stabil;
- ha $V'(x,y) \cdot f(x,y) > 0 \quad (\forall (x,y) \neq (0,0))$, akkor a $(0,0)$ egyensúlyi pont instabil.

A feladatokban a V (ún. Ljapunov-)függvényt

$$V(x,y) = ax^2 + by^2$$

alakban keressük, ahol $a, b > 0$ állandók. Néha kényelmesebb $\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2}by^2$ alakban keresni.

Feladat

Vizsgáljuk meg a $(0,0)$ egyensúlyi pont stabilitását!

$$1.\ \begin{cases} \dot{x} = \ \ y - x^3 \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{cases} \qquad 2.\ \begin{cases} \dot{x} = -2y + x^5 \\ \dot{y} = \ \ \ x \ + y^5 \end{cases}$$

$$3.\ \begin{cases} \dot{x} = -y + x^3 \\ \dot{y} = \ \ x + y^3 \end{cases} \qquad 4.\ \begin{cases} \dot{x} = \ \ 3y - x \\ \dot{y} = -2x - y \end{cases}$$

Házi feladatok

Ami a feladatokból megmaradt.

Elméleti tudnivalók

A vizsgált egyenletek $a(x,y)\,\partial_x u(x,y) + b(x,y)\,\partial_y u(x,y) = 0$ alakúak, tömör írásmóddal

$$a(x,y)\,\partial_x u + b(x,y)\,\partial_y u = 0\,.$$

Az általános megoldáshoz először kiszámítjuk az

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x,y) \\ \dot{y} = b(x,y) \end{cases}$$

autonóm rendszer $V(x,y)$ első integrálját. Ekkor az eredeti egyenlet általános megoldása

$$u(x,y) = \phi(V(x,y))$$

alakú, ahol $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges folytonosan deriválható egyváltozós függvény.

Feladatok

1. Adjuk meg a következő elsőrendű homogén lineáris PDE-k általános megoldását:

$$a)\quad 2y\,\partial_x u - e^x\,\partial_y u = 0, \qquad\qquad b)\quad x^2\,\partial_x u + y^3\,\partial_y u = 0.$$

2. Oldjuk meg a következő lineáris PDE-ket a megadott mellékfeltétellel:

$$\begin{array}{lll} a) & \partial_x u + y\,\partial_y u = 0, & u(x,1) = e^{-3x}, \\ b) & \partial_x u - 2\,\partial_y u = 0, & u(x,x) = x. \end{array}$$

Házi feladatok

1. Adjuk meg a következő elsőrendű homogén lineáris PDE-k általános megoldását:

$$a)\quad e^{2x}\,\partial_x u - y^2\,\partial_y u = 0, \qquad\qquad b)\quad y^4\,\partial_x u + \cos x\,\partial_y u = 0.$$

2. Oldjuk meg a következő lineáris PDE-ket az adott mellékfeltétellel:

$$\begin{array}{lll} a) & 3\,\partial_x u + 4\,\partial_y u = 0, & u(x,0) = x^2, \\ b) & \partial_x u - \cos 2x\,\partial_y u = 0, & u(0,-y) = y. \end{array}$$