

7. 2×2 -ES HOMOGEN LINEÁRIS RENDSZEREK

Elméleti tudnivalók

A KDE-rendszer:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t), \quad \text{azaz} \quad \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

ahol A adott 2×2 -es valós mátrix.

Az általános megoldás a következőképpen kapható meg. Legyenek λ_1 és λ_2 az A sajátértékei.

- (i) Ha $\lambda_1 \neq \lambda_2$ valós. Legyenek $\underline{u}, \underline{v}$ ezekhez tartozó sajátvektorok, azaz $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^2$ nemnulla-vektorok úgy, hogy $A\underline{u} = \lambda_1 \underline{u}$, $A\underline{v} = \lambda_2 \underline{v}$. Ekkor

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{u} + c_2 e^{\lambda_2 t} \underline{v} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ tetsz.})$$

(Megengedhető $\lambda_1 = \lambda_2$ is, ha van két független sajátvektor: ekkor ezek lesznek $\underline{u}$ és $\underline{v}$.)

- (ii) Ha $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$, de csak egy független sajátvektor van. Legyen ez $\underline{u}$, azaz $\underline{u} \in \mathbb{R}^2$ nemnulla-vektor és $A\underline{u} = \lambda \underline{u}$, valamint legyen $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ az $A\underline{v} = \lambda \underline{v} + \underline{u}$ egyenlet megoldása. Ekkor

$$\underline{x}(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t} \underline{u} + c_2 e^{\lambda t} \underline{v} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ tetsz.})$$

- (iii) Ha $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ komplex sajátértékek ($\beta \neq 0$). Legyen $\underline{p}$ az $(\alpha + i\beta)$ -hoz tartozó (komplex) sajátvektor, azaz $\underline{p} \in \mathbb{C}^2$ nemnulla-vektor, melyre $A\underline{p} = (\alpha + i\beta)\underline{p}$. Legyen $\underline{u} = \operatorname{Re} \underline{p} \in \mathbb{R}^2$ és $\underline{v} = \operatorname{Im} \underline{p} \in \mathbb{R}^2$, azaz $\underline{p} = \underline{u} + i\underline{v}$. Ekkor

$$\underline{x}(t) = r e^{\alpha t} \cos(\beta t - \varphi_0) \underline{u} - r e^{\alpha t} \sin(\beta t - \varphi_0) \underline{v} \quad (r \geq 0, \varphi_0 \in [0, 2\pi) \in \mathbb{R} \text{ tetsz.})$$

Feladatok

1. Oldjuk meg a következő lineáris rendszereket:

$$a) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 \end{cases} \quad b) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - x_2 \end{cases} \quad c) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 \end{cases}.$$

2. Oldjuk meg a fenti (a), (c) lineáris rendszereket az alábbi kezdeti feltétellel:

$$(a) \quad \begin{aligned} x_1(0) &= -1 \\ x_2(0) &= 5 \end{aligned} \quad (c) \quad \begin{aligned} x_1(0) &= 3 \\ x_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

Házi feladatok

1. Oldjuk meg a következő lineáris rendszereket!

$$a) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 8x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases} \quad b) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 + 4x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + 3x_2 \end{cases} \quad c) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}.$$

2. Egy faj populációjának egyedszámát két élőhelyen az idő függvényében (folytonos közelítéssel) az $x(t)$ és $y(t)$ függvények írják le. Ha az első élőhelyen a faj az egyszerű növekedési modell szerint szaporodik, és mindkét irányban az egyedszámmal arányos migráció folyik, akkor az

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = rx \end{cases}$$

rendszert kapjuk. Adjuk meg ennek általános megoldását az $a = r = 1$ és $b = 2$ együtthatók esetén! Mutassuk meg, hogy hosszú idő elteltével a két élőhelyen vett populációk hányadosa kb. állandó lesz!

3. Ha a fenti modellben a faj a második élőhelyen is az egyszerű növekedési modell szerint szaporodik, akkor az

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = rx + sy \end{cases}$$

rendszert kapjuk. Adjuk meg ennek általános megoldását az $a = r = s = 1$ és $b = 2$ együtthatók esetén!

Elméleti tudnivalók

A 0 pont körüli kezdetiérték-feladat megoldását keressük a 0 pont körüli

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} x^3 + \dots$$

Taylor sorral, ha a differenciálegyenletből felírható egy rekurzió az $y^{(n)}(0)$ együtthatókra. A gyakorlatban a megoldást csak közelítjük Taylor-polinommal, amihez az első néhány együtthatót számítjuk ki a differenciálegyenlet ismételt deriválása segítségével.

Feladatok

1. Írjuk fel az $y'(x) = -y(x)$, $y(0) = 1$ feladat megoldásának hatványsorát!
2. Írjuk fel az y megoldás harmadfokú Taylor-polinomját a 0 pont körül:

$$\begin{aligned} a) \quad y''(x) &= y^2(x), & y(0) &= 1, \quad y'(0) = 1; \\ b) \quad y'(x) &= \sin 3x + 2e^{-y(x)}, & y(0) &= 0. \end{aligned}$$

Házi feladatok

3. Írjuk fel az y megoldás harmadfokú Taylor-polinomját a 0 pont körül:

$$\begin{aligned} a) \quad y'(t) - y(t) \sin t &= t, & y(0) &= 2; \\ b) \quad y''(x) &= x y^2(x) - y'(x), & y(0) &= 2, \quad y'(0) = 1. \end{aligned}$$

4. Egy ℓ hosszú inga kitérésének szögét az idő függvényében a $\theta(t)$ függvény adja meg. A mozgásegyenletből az m tömeggel egyszerűsítve a $\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{\ell} \sin \theta(t) = 0$ egyenletet kapjuk. Jelölje $\omega := \sqrt{\frac{g}{\ell}}$. Függőleges helyzetből v sebességgel meglökve a $\theta(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = v$ kezdeti feltételeket kapjuk. Számítsuk ki ekkor a megoldást közelítő polinomot a t^3 -ös tagig!
5. Egy kémiai reakcióban szereplő két anyag koncentrációját az idő függvényében az $u(t)$ és $v(t)$ függvények írják le. Ha a két anyag kölcsönhatásával arányosan az egyik anyag a másikba alakul, akkor az

$$\begin{aligned} u'(t) &= -k u(t) v(t), \\ v'(t) &= k u(t) v(t) \end{aligned}$$
 egyenletrendszert kapjuk, ahol $k > 0$ állandó. Legyen $k = 1$ és $u(0) = v(0) = 1$. Számítsuk ki ekkor az $u(t)$ és $v(t)$ megoldásokat közelítő polinomot a t^3 -ös tagig!

9. LAPLACE-TRANSZFORMÁCIÓ

Elméleti tudnivalók

A Laplace-transzformáció egy alkalmas integrállal definiált $f \xrightarrow{L} F$ függvénytranszformáció, amely lineáris. A főbb elemi függvények és a deriváltak transzformáltjai az alábbiak.

(Az értelmezési tartományokat nem írjuk ki, mindvégig a lehető legbővebben értjük.)

$f(t)$	$F(p)$
1	$\frac{1}{p}$
$e^{\alpha t}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ áll.)	$\frac{1}{p-\alpha}$
t^n ($n \in \mathbb{N}$ áll.)	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\cos bt$ ($b \in \mathbb{R}$ áll.)	$\frac{p}{p^2+b^2}$
$\sin bt$ ($b \in \mathbb{R}$ áll.)	$\frac{b}{p^2+b^2}$
$e^{at} t^n$ ($a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ áll.)	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$e^{at} \cos bt$ ($a, b \in \mathbb{R}$ áll.)	$\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$
$e^{at} \sin bt$ ($a, b \in \mathbb{R}$ áll.)	$\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$
$f'(t)$	$pF(p) - f(0)$
$f''(t)$	$p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$
$\vdots$	$\vdots$
$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

Feladatok

1. $F(p) = ?$, ha

(a) $f(t) := 7 \sin 3t - 5 \cos 2t$, (b) $f(t) := 4e^{-2t}$,

(c) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$, (d) $f(t) := \delta_3(t)$.

2. $f(t) = ?$, ha

(b) $F(p) = \frac{p+4}{p^2+9}$, (c) $F(p) = \frac{1}{p^2+2p+2}$, (c) $F(p) = \frac{p^2+3p+9}{p^3-27}$, (d) $F(p) = \frac{p+1}{p^3+1}$.

(Az utóbbi kettőnél használjuk a $p^3 - q^3 = (p - q)(p^2 + pq + q^2)$ azonosságot.)

3. Laplace-transzformáció segítségével oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat:

(a) $y''(t) + 4y(t) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$,

(b) $y'''(t) - 8y(t) = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -2$.

(c) $y''(t) + y(t) = \delta_2(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Házi feladatok

1. Laplace-transzformáció segítségével oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat:

(a) $y''(t) + 9y(t) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 5,$

(b) $y'''(t) - 8y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 4.$

(c) $y'''(t) + 8y(t) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 2.$

(d) $y^{(4)}(t) - 9y(t) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = -3.$

(e) $y''(t) + y(t) = \delta_\pi(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

(e) $y''(t) + y(t) = h(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad \text{ahol} \quad h(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t \geq \pi \\ 0 & \text{különben.} \end{cases}$

Elméleti tudnivalók

Az $\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$ autonóm rendszer első integrálja olyan kétváltozós V függvény, melyre a rendszer bármely megoldása esetén $t \mapsto V(x(t), y(t)) \equiv \text{állandó}$. A fázisképet V szintvonalainak ábrázolása adja a mozgás irányával együtt.

Feladatok

1. A következő autonóm rendszerek esetén adjuk meg az első integrált és vázoljuk fel a fázisképet:

$$\begin{array}{llll} a) \quad \begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases} & b) \quad \begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = -x \end{cases} & c) \quad \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 1 \end{cases} & d) \quad \begin{cases} \dot{x} = 2 \\ \dot{y} = 3 \end{cases} \\ e) \quad \begin{cases} \dot{x} = 2 \\ \dot{y} = e^x \end{cases} & f) \quad \begin{cases} \dot{x} = e^y \\ \dot{y} = 2 \end{cases} & g) \quad \begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = \sin 3x \end{cases} & h) \quad \begin{cases} \dot{x} = -4y \\ \dot{y} = 3x \end{cases} \end{array}$$

AUTONÓM RENDSZEREK STABILITÁSVIZSGÁLATA

Elméleti tudnivalók

Most azt is feltesszük, hogy $(0, 0)$ egyensúlyi pont, azaz $x(t) \equiv y(t) \equiv 0$ konstans megoldás. Ennek stabilitását vizsgáljuk.

Ljapunov-módszer: alkalmas $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ segédfüggvényt keresünk (ennek változóit is x, y -nal jelöljük). A Ljapunov-tétel szerint a stabilitást a

$$V'(x, y) \cdot f(x, y) = \partial_x V(x, y) f_1(x, y) + \partial_y V(x, y) f_2(x, y)$$

skalárszorzat előjeléből láthatjuk az alábbiak szerint:

- ha $V'(x, y) \cdot f(x, y) < 0$ ($\forall (x, y) \neq (0, 0)$), akkor a $(0, 0)$ egyensúlyi pont aszimptotikusan stabil;
- ha $V'(x, y) \cdot f(x, y) > 0$ ($\forall (x, y) \neq (0, 0)$), akkor a $(0, 0)$ egyensúlyi pont instabil.

A feladatokban a V (ún. Ljapunov-)függvényt

$$V(x, y) = ax^2 + by^2$$

alakban keressük, ahol $a, b > 0$ állandók. Néha kényelmesebb $\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2}by^2$ alakban keresni.

Feladat

Vizsgáljuk meg a $(0,0)$ egyensúlyi pont stabilitását!

$$\begin{array}{ll} 1. \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = y - x^3 \\ \dot{y} = -x - y^3 \end{array} \right. & 2. \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -2y + x^5 \\ \dot{y} = x + y^5 \end{array} \right. \\ 3. \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -y + x^3 \\ \dot{y} = x + y^3 \end{array} \right. & 4. \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = 3y - x \\ \dot{y} = -2x - y \end{array} \right. \end{array}$$

Házi feladatok

Ami a feladatokból megmaradt.

Elméleti tudnivalók

A vizsgált egyenletek $a(x, y) \partial_x u(x, y) + b(x, y) \partial_y u(x, y) = 0$ alakúak, tömör írásmóddal

$$a(x, y) \partial_x u + b(x, y) \partial_y u = 0.$$

Az általános megoldáshoz először kiszámítjuk az

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x, y) \\ \dot{y} = b(x, y) \end{cases}$$

autonóm rendszer $V(x, y)$ első integrálját. Ekkor az eredeti egyenlet általános megoldása

$$u(x, y) = \phi(V(x, y))$$

alakú, ahol $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ tetszőleges folytonosan deriválható egyváltozós függvény.

Feladatok

- Adjuk meg a következő elsőrendű homogén lineáris PDE-k általános megoldását:

$$a) \quad 2y \partial_x u - e^x \partial_y u = 0, \qquad b) \quad x^2 \partial_x u + y^3 \partial_y u = 0.$$

- Oldjuk meg a következő lineáris PDE-eket a megadott mellékfeltétellel:

$$\begin{aligned} a) \quad \partial_x u + y \partial_y u &= 0, & u(x, 1) &= e^{-3x}, \\ b) \quad \partial_x u - 2 \partial_y u &= 0, & u(x, x) &= x. \end{aligned}$$

Házi feladatok

- Adjuk meg a következő elsőrendű homogén lineáris PDE-k általános megoldását:

$$a) \quad e^{2x} \partial_x u - y^2 \partial_y u = 0, \qquad b) \quad y^4 \partial_x u + \cos x \partial_y u = 0.$$

- Oldjuk meg a következő lineáris PDE-eket az adott mellékfeltétellel:

$$\begin{aligned} a) \quad 3 \partial_x u + 4 \partial_y u &= 0, & u(x, 0) &= x^2, \\ b) \quad \partial_x u - \cos 2x \partial_y u &= 0, & u(0, -y) &= y. \end{aligned}$$