Környezetmérnök MatA3 fakultatív gyakorlat – feladatok az 1. anyagrészhez

1. Integrálás (ismétlés)

Pár fontos típus címszavakban:

1. x^α, e^x, $\sin x$, $\cos x$ primitív függvénye.
2. Lineáris helyettesítés: $\displaystyle\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\,F(ax+b)$, ha $a \neq 0$ és $F' = f$.
   Integráljuk: $\frac{1}{2x+3}$, $\frac{1}{4-x}$, e^{2x}, e^{-x}.
3. Nevezőben polinom: $\frac{1}{ax+b}$, $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$, spec. $\frac{1}{x^2-a^2}$ primitív függvénye.
4. Kompozícióderivált integrálása: $\frac{1}{ax+b}$ is ilyen volt, ill. $\frac{x}{1+x^2}$, $\operatorname{tg} x$ primitív függvénye.
5. Parciális integrálás: pl. $x\,e^x$ primitív függvénye.

Elemi feladatok

1. Rajzoljuk fel az iránymezőt:

   a) $y'(x) = \frac{3-y(x)}{5}$, *b)* $y'(x) = 2x - y(x)$.

2. Felhasználva az $\dot{x}(t) \equiv 0 \Leftrightarrow x(t) \equiv c$ ($t \in I$ intervallumon) alapelvet, határozzuk meg az összes megoldást:

   a) $\dot{x}(t) = v$, ahol $v \in \mathbb{R}$ adott állandó.
   Fizikai jelentés: $x(t)$ az állandó v sebességgel mozgó pont helyzete a t idő függvényében.

   b) $\ddot{x}(t) = a$, ahol $a \in \mathbb{R}$ adott állandó.
   Fizikai jelentés: $x(t)$ az állandó a gyorsulással mozgó pont helyzete a t idő függvényében.

3. Oldjuk meg a kezdetiérték-problémákat:

   a) $\dot{x}(t) = v, \quad x(0) = x_0.$

   b) $\ddot{x}(t) = a, \quad \dot{x}(0) = v_0, \quad x(0) = x_0.$

   c) $\ddot{x}(t) = 9.8, \quad \dot{x}(0) = -3, \quad x(0) = 0.5.$

Házi feladatok

1. Iránymező: a) $y'(x) = y(x) + 3x$,
   b) $y'(x) = \dfrac{y(x)}{x}$ (az ábrából találjuk is ki a megoldásokat), c) $y'(x) = \sin(x + y(x))$.

2. Felhasználva a $z'(x) \equiv 0 \Leftrightarrow z(x) \equiv c$ ($x \in I$ intervallumon) alapelvet, határozzuk meg az összes megoldást:
   (a) $(x \cdot y(x))' = 0$, (b) $y^{(4)}(x) = 0$ (negyedrendű derivált),
   (c) $(r^2 \cdot u'(r))' = 0$ (égitestek gravitációs erőterének potenciálja).

3. Tekintsünk egy függőlegesen feldobott követ (ld. 3/b feladat, $a = -g = -9.8\,m/s^2$).
   (a) Ha $v_0 = 14.7$ m/s, akkor hány sec múlva lesz a kő a tetőponton?
   (b) Mekkora egy kő a kezdősebessége, ha 1 másodperc múlva esik vissza a földre? (Azaz $\dot{x}(0) = ?$, ha $x(0) = x(2) = 0$)

Elméleti tudnivalók

- $y'(x) = h(y(x)) \cdot g(x)$ alakú egyenletek.
- Ha valamely $\alpha \in \mathbb{R}$-re $h(\alpha) = 0$, akkor $y(x) \equiv \alpha$ konstans megoldás.
- Ha egy I intervallumon $h(y) \neq 0$, akkor a formálisan felírt $\dfrac{dy}{dx} = h(y)\,g(x)$ egyenletből átosztva és integrálva $\displaystyle\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$. Ha egy-egy primitív függvény $H(y) := \displaystyle\int \frac{dy}{h(y)}$ és $G(x) := \displaystyle\int g(x)dx$, akkor az $H(y) = G(x) + c$ egyenletből kell kifejezni y-t x függvényében.

Feladatok

1. Keressük meg az $y'(x) = \dfrac{x^2}{y^3(x)}$ egyenlet általános megoldását.

2. Oldjuk meg az $E'(r) = -\frac{2}{r}\,E(r)$ egyenletet (itt $E(r) > 0$ egy térbeli tömegpont erőterének nagysága r távolságban).

3. Lehűlő test hőmérséklete a
$$T'(t) = K \cdot (T_k - T(t))$$
egyenlettel írható le, ahol T_k (a külső hőmérséklet) és a $K > 0$ ráta állandók. (A hűlés sebessége arányos a hőmérséklet különségével, ez Newton hűlési törvénye.)
   a) Adjuk meg az általános megoldást.
   b) Milyen $T(0) = T_0$ kezdeti feltétel mellett beszélünk lehűlésről, illetve felmelegedésről?
   c) Kenyér esetén legyen $T_k = 30$ és $K = 0,0366$. Ha a kenyér kezdeti hőmérséklete $T(0) = 120$ fok, akkor milyen meleg lesz a kenyér egy óra múlva, azaz $T(60) =$?

4. Egy tartályban 10 l víz van, percenként 2 l 30%-os sóoldat ömlik be és 2 l elkevert oldat folyik ki. Ekkor a só $y(t)$ mennyiségére $y'(t) = 0.6 - 0.2y(t)$, mert 0.6l/perc folyik be és a só 0.2 része folyik ki.
   a) Adjuk meg az általános megoldást!
   b) Ha a kezdőpillanatban a vízben nincs só, azaz $y(0) = 0$, akkor mennyi só lesz 5 perc múlva?

Házi feladatok

1. Oldjuk meg a $y'(x) = 2\dfrac{y(x)}{x}$ szétválasztható egyenletet!

2. Oldjuk meg az $y'(x) = \dfrac{y(x)^2}{x^2}$ egyenletet $y(1) = 1$ kezdeti feltétellel.

3. Az $y'(t) = y^{1+p}(t)$ egyenlet ($p > 0$ állandó) egy anyag $y(t) > 0$ koncentrációját jellemzi az idő függvényében. Ez olyan autokatalitikus kémiai reakciót ír le, melyben az anyag lineárisnál

gyorsabb mértékben gerjeszti önmagát. Adjuk meg az általános megoldást! Mutassuk meg, hogy az anyag ilyenkor véges időn belül "felrobban", azaz bármely y megoldás esetén van olyan $T > 0$, hogy $\lim_{t \to T^-} y(t) = +\infty$!

4. A 500 m^3 térfogatú szobában 0.15% szén-dioxid gáz van. A ventillátor percenként 40 m^3 0.04% szén-dioxidot tartalmazó levegőt fúj be. Feltesszük, hogy a szobába beáramló gáz térfogata egyenlő a szobából kiáramló gáz térfogatával. Mennyi idő múlva csökken a szoba levegőjében lévő szén-dioxid mennyisége a felére? (Útm.: a diff.egyenlet a gyak. 4. feladatához hasonlóan írható fel.)

5. Modellezzük egy $x(t)$ függvénnyel egy nagy halastóban a nagyméretű halpopulációt az idő függvényében. Tegyük fel, hogy "lehalászás" nélkül a vizsgált időtartamban az $\dot{x}(t) = Kx(t)$ egyenlet szerinti korlátlan szaporodási modell érvényesülne. Ha $H > 0$ állandó halászati kvótát engedélyeznek, akkor az egyenlet $\dot{x}(t) = Kx(t) - H$ alakú lesz. Legyen a $t = 0$ kezdeti időpontban a halak mennyisége $x(0) =: x_0$. Mekkora H kvóta engedélyezhető az x_0 kezdetiérték és a $K > 0$ szaporodási ráta függvényében, hogy ne pusztuljanak ki a halak, azaz $x(t)$ értéke pozitív korlát fölött maradjon minden $t > 0$ esetén?

Feladatok

1. Baktériumok korlátlan szaporodása : $y'(t) = Ky(t)$, ahol $K > 0$ állandó és csak az $y \geq 0$ megoldásokat keressük. Oldjuk meg általánosan, majd az $y(0) = y_0$ kezdeti feltétellel is.

2. Az $y'(t) = K \cdot y(t) \cdot (M - y(t))$ egyenlet a baktériumok korlátozott szaporodását írja le M eltartóképességű területen. Oldjuk meg. Ábrázoljuk a megoldást $K = 1$ és $M = 10$-re.

3. Egy radioaktív izotóp bomlási sebessége egyenesen arányos a meglévő tömeggel, így a t idő függvényében a tömeg $N(t)$ értékét az $N'(t) = -\lambda N(t)$ egyenlet határozza meg, ahol $\lambda > 0$ az ún. bomlási állandó.

   a) Oldjuk meg az egyenletet általánosan, majd $N(0) = N_0$ kezdeti feltétellel.

   b) Mutassuk meg, hogy értelmes a felezési idő fogalma, azaz van olyan $T > 0$ időtartam, hogy bármely $t > 0$ esetén az $N(t+T)$ érték épp fele az $N(t)$ értéknek! Fejezzük ki T értékét λ-val!

Házi feladatok

1. Tekintsük a radióaktív bomlás egyenletét: $N'(t) = -\lambda \cdot N(t)$, ahol $\lambda > 0$ állandó.

   a) Ha az időt órában mérjük, $\lambda = 10^{-3}$ és a kezdeti tömeg $N(0) = 271$ kg, mennyi lesz az $N(t)$ tömeg 1000 óra múlva?

   b) Ha a rádium felezési ideje 1600 év, hány éves az a minta, amelynek vizsgálata alapján a kiindulási anyag 4.2%-a bomlott el?

2. Egy bányakőzet megvizsgált darabja 100 mg uránt és 14 mg ólmot tartalmaz. Ismert, hogy az urán felezési ideje $4,5 \cdot 10^9$ év, és hogy 238 g urán teljes elbomlásakor 206 g ólom keletkezik. Tegyük fel, hogy keletkezése pillanatában a bányakőzet nem tartalmazott ólmot. Állapítsuk meg a bányakőzet korát! (Útm.: a radióaktív bomlás előbb tanult egyenlete áll fenn.)

3. Fényelnyelés hatására egy homogén oldatba belépő fény intenzitása a megtett úttal arányosan csökken, éspedig az $I'(x) = -kcI(x)$ egyenlet szerint alakul, ahol $I(x)$ a fény intenzitása x út megtétele után az oldatban, és $k, c > 0$ állandók (c a koncentráció, k arányossági tényező). Jelölje $I_0 := I(0) > 0$ a belépéskor mért kezdeti intenzitást.

   a) Számítsuk ki $I(x)$-et!

   b) Ha a fénysugár d út megtétele után lép ki az oldatból I_1 intenzitással, akkor igazoljuk az $\ln \frac{I_0}{I_1} = kcd$ összefüggést (Lambert-Beer-törvény)!

4. Egy fényre érzékeny baktériumtörzs korlátlan szaporodását az $y'(t) = (30 - \cos \frac{2\pi t}{24})\, y(t)$ egyenlettel modellezzük. Adjuk meg az általános megoldást!

4. Elsőrendű lineáris közönséges differenciálegyenletek

Elméleti tudnivalók

Elsőrendű lineáris egyenlet:

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t). \tag{L}$$

A megoldás menete:

- Homogén feladat ($b \equiv 0$): $y'(t) = a(t)y(t)$. Megoldása: $y_h(t) = ce^{A(t)}$ ($c \in \mathbf{R}$ tetsz.), ahol $A'(t) = a(t)$.

  (Tehát $A(t) = \displaystyle\int a(t)dt$, ahol elég egy primitív függvény, azaz nem kell $+c$.)

- Inhomogén feladat ($b \not\equiv 0$): *az állandók variálásának módszere.* Keressük az (L) egyenlet megoldását

  $$y(t) = C(t)e^{A(t)}$$

  alakban. Ha ezt behelyettesítjük (L)-be, akkor $C'(t)$ kifejezhető, ebből $C(t)$ megkapható (itt már kell a $+c$ konstans).

Feladatok

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket az állandók variálásának módszerével!

1. Tegyük fel, hogy a korábbi sóoldatos feladatban a befolyó sómennyiség exponenciálisan csökken. Ekkor az egyenlet: $y'(t) = 0.6e^{-t} - 0.2y(t)$. Legyen a 0 időpontban $y(0) = 0.5$.
2. $E'(r) = -\frac{2}{r}\, E(r) + \frac{1}{r}$ (itt $E(r) > 0$ egy térbeli tömegpont erőtere $\frac{1}{r}$-es külső erő mellett).
3. $y'(x) = \dfrac{y(x)}{x} + x$
4. $N'(t) = -\lambda N(t) + L$, ahol $\lambda, L > 0$ állandók.

Házi feladatok

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket az állandók variálásának módszerével!

1. Tegyük fel, hogy a korábbi sóoldatos feladatban a befolyó sómennyiség így változik: a KDE $y'(t) = 3\,e^{-0.2\,t} - 0.2\,y(t)$. Legyen a 0 időpontban $y(0) = 3$.
2. RC-áramkörökben az áramerősséget a t idő függvényében az $I(t)$ függvény írja le. Az alábbi KDE áll fenn: $R\,I'(t) + \frac{1}{C}I(t) = F(t)$, ahol $R, C > 0$ állandók (C a kondenzátor kapacitása és R az ellenállás), és $F(t)$ írja le a külső gerjesztést.
   a) Adjuk meg a megoldást, ha $I(0) =: I_0$ adott, és nincs külső gerjesztés, azaz $F(t) \equiv 0$!
   b) Adjuk meg az általános megoldást, ha $R = C = 1$, valamint $F(t) = 2\,t\,e^{-t}$.
3. $E'(r) = -\frac{2}{r}\, E(r) + \frac{1}{r^4}$ (itt $E(r) > 0$ egy térbeli tömegpont erőtere $\frac{1}{r^4}$-es külső erő mellett).

4. Oldjuk meg a következő egyenleteket:

   (a) $xy'(x) - 2y(x) = 2x^4$ (előbb rendezzük át); (b) $y'(x) = \frac{5}{x}y(x) + 1$.

5. Két anyag koncentrációját $x(t)$ és $y(t)$ írja le az idő függvényében. Ha az első anyag k sebességű reakcióval alakul át a másodikba, amely közben ettől függetlenül μ sebességgel lebomlik, akkor ezt az $\dot{x}(t) = -kx(t)$ és $\dot{y}(t) = kx(t) - \mu y(t)$ egyenletek írják le. Adjuk meg az x és y függvényeket, ha $k > \mu$, és kezdetben csak az első anyagból van jelen egységnyi, azaz $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.
   (Útm.: előbb az elsőt, majd a másodikat oldjuk meg.)

Elméleti tudnivalók

A vizsgált KDE-k általános alakja:

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

vagy tömörebben $ay'' + by' + cy = 0$, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ állandók. Az *általános megoldás* mindig $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ alakú ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ áll.), amit a következőképpen kaphatunk meg. Tekintsük az

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \qquad \text{(K)}$$

másodfokú *karakterisztikus egyenletet.* Három esetet különböztetünk meg.

(i) Ha a (K) egyenletnek két valós gyöke van: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, akkor

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ konstansok}).$$

(ii) Ha a (K) egyenletnek egy db kétszeres valós gyöke van: λ, akkor

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ konstansok}).$$

(iii) Ha a (K) egyenletnek két komplex gyöke van: $\alpha \pm i\beta$, akkor

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ konstansok}).$$

A kar. egyenlet gyökei alapján a három megoldóképlet valamelyikét használjuk.

Megjegyzés. Ha a kar. egyenlet gyökei komplexek, akkor a fenti (iii) megoldóképlet felírható az alábbi fáziseltolásos alakban is: $y(t) = A\, e^{\alpha t} \cos(\beta t - \varphi_0)$ $\quad (A \geq 0, \ \ \varphi_0 \in [0, 2\pi)$ tetsz.)

Ha itt $\alpha = 0$, akkor ez a harmonikus rezgést írja le.

Feladatok

1. Adjuk meg a következő egyenletek általános megoldását. (Írjuk fel fáziseltolásos alakban is, amikor lehetséges.)

   (a) $y'' + y' - 6y = 0,$ $\quad (b)$ $y'' - 4y' + 4y = 0,$ $\quad (c)$ $y'' - 6y' + 13y = 0,$

   (d) $y'' + 4y = 0,$ $\quad (e)$ $y'' - 4y = 0,$ $\quad (f)$ $y'' - 4y' = 0.$

2. *Harmonikus rezgőmozgás* egyenlete: $y''(t) + \omega^2 y(t) = 0.$
   Rugó esetén $my''(t) + Dy(t) = 0$, ahol $m, D > 0$, ekkor $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ a rezgés körfrekvenciája.
   (Hasonló: inga, LC-áramkör.)
   Adjuk meg az általános megoldást!

3. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a megadott kezdeti feltétellel.
   (a) $y'' + 9y = 0,\ \ y(0) = 0$ és $y'(0) = 6.$ $\quad$ (b) $y'' - 4y = 0,\ \ y(0) = 1$ és $y'(0) = 6.$

Házi feladatok

1. Adjuk meg a következő egyenletek általános megoldását:

   $$(a)\ 2y'' + 6y' - 8y = 0, \qquad (b)\ y'' + \frac{y'}{2} + \frac{y}{16} = 0, \qquad (c)\ 4y'' + 9y = 0, \qquad (d)\ y'' - 2y' + 17y = 0.$$

2. *Rezgőkörök.* Tekintsük a már említett áramkört, ha tekercset is betettünk (melynek $L > 0$ az indukciós együtthatója), és ha nincs külső gerjesztés. Ekkor az $L\,I''(t) + R\,I'(t) + \frac{1}{C}I(t) = 0$ egyenletet kapjuk, ahol $C > 0$ a kondenzátor kapacitása és $R \geq 0$ az ellenállás ($R = 0$ esetén nincs a körben ellenállás). Adjuk meg az általános megoldást, ha:

   (a) $R = 0,\ L, C > 0,$ (b) $R = 0,\ L = C = 2,$

   (c) $L = 1,\ R = 3,\ C = 0{,}4,$ (d) $L = 2,\ R = 10,\ C = 0{,}08,$ (e) $L = 2,\ R = 4{,}5,\ C = 1.$

3. Egy inga kis kilengéseit az $\ddot{x}(t) + \frac{g}{\ell}x(t) = 0$ egyenlet írja le, ha a közegellenállást elhanyagoljuk. Legyen $g = 10m/s^2,\ \ \ell = 2.5m.$

   (a) Adjuk meg az általános megoldást!

   (b) Adjuk meg a megoldást $x(0) = 0.3$ és $\dot{x}(0) = 0$ kezdeti feltétellel!

   (c) Csillapítás esetén az $\ddot{x}(t) + s\dot{x}(t) + \frac{g}{\ell}x(t) = 0$ egyenletet kapjuk. Legalább mekkora legyen az $s > 0$ csillapítási együttható, hogy ne legyen oszcilláció, azaz az inga ne lengjen oda-vissza az egyensúlyi helyzet körül?

4. Adjuk meg az alábbi KDE-k megoldását a megadott kezdeti feltételek mellett:

   $$(a)\quad y'' + 16y = 0,\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = -2, \qquad (b)\quad 2y'' + 6y' - 8y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 1.$$

6. Inhomogén másodrendű egyenletek

Elméleti tudnivalók

Az egyenlet:

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t),$$

ahol a, b, c állandók, $a \neq 0$, az $f(t)$ ún. jobboldal (vagy inhomogenitás) írja le a külső gerjesztést. A fenti inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

alakú, ahol $y_h(t)$ a homogén egyenlet általános megoldása (5. gyak.) és $y_p(t)$ az inhomogén egyenlet egy db (ún. partikuláris) megoldása. Utóbbit a próbafüggvény módszerével keressük meg az alábbi táblázat alapján:

$f(t)$	$y_p(t)$	
	1. lépés: próbafv.	2. lépés: rezon. ell.
re^{at}	Ae^{at}	$\mu = a$
$P(t)$ n-edfokú pol.	$Q(t)$ n-edfokú pol.	$\mu = 0$
$r\cos bt$	$A\cos bt + B\sin bt$	$\mu = ib$
$s\sin bt$	$A\cos bt + B\sin bt$	$\mu = ib$
$r\cos bt + s\sin bt$	$A\cos bt + B\sin bt$	$\mu = ib$
$e^{at}(r\cos bt + s\sin bt)$	$e^{at}(A\cos bt + B\sin bt)$	$\mu = a + ib$

Ennek jelentése, hogy két lépésben keressük meg a próbafüggvényt:

- Az első lépésben kiválasztjuk az "1. lépés" oszlopából a megadott alakú $f(t)$ jobboldalhoz javasolt $y_p(t)$ függvényt.
- A 2. lépésben (a rezonancia ellenőrzése) megnézzük, hogy a megadott μ érték gyöke-e a (K) karakterisztikus egyenletnek. Ha nem gyöke, akkor az eddigi $y_p(t)$ jó lesz próbafüggvénynek. Ha gyöke, akkor viszont a próbafüggvényt még meg kell szorozni: vagy t-vel (ha μ egyszeres gyöke (K)-nak), vagy t^2-tel (ha μ kétszeres gyöke (K)-nak)

Végül a próbafüggvényben lévő ismeretlen együtthatókat az egyenletbe való behelyettesítéssel számoljuk ki.

Feladatok

1. Oldjuk meg az $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = f(t)$ egyenletet a következő $f(t)$ függvények esetén:

   a) e^{3t}, *b)* $4\,e^{2t}$, *c)* $2t^2 + 1$.

2. Oldjuk meg a következő egyenleteket:

   a) $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 3\,e^{2t}$, *b)* $y''(t) + y(t) = 5\,\sin 2t$, *c)* $y''(t) + 9y(t) = \cos 3t$.

3. Adjuk meg a következő egyenletek esetén, hogy az y_p partikuláris megoldást milyen alakban keressük:

$$a)\quad y''(t) - 2y'(t) + y(t) = t^2 + 2t - 3, \qquad b)\quad y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = \sin t,$$

$$c)\quad y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = e^t(\cos 2t + 2\sin 2t), \qquad d)\quad y''(t) - 9y(t) = e^{3t},$$

$$e)\quad y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = t + e^{2t}, \qquad f)\quad y''(t) - 2y'(t) + y(t) = t + e^t.$$

Házi feladatok

1. Oldjuk meg az $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = f(t)$ egyenletet a következő $f(t)$ függvények esetén:

$$a)\quad 5\,e^t, \qquad b)\quad e^{-t}, \qquad c)\quad 3t - 3, \qquad d)\quad 2\cos 4t.$$

2. Gerjesztett RLC-áramkörökben az időben változó $I(t)$ áramerősséget az alábbi KDE írja le:

$$L\,I''(t) + R\,I'(t) + \tfrac{1}{C}I(t) = F(t),$$

ahol $R, L, C > 0$ állandók (az ellenállás nagysága, a tekercs induktivitása, ill. a kondenzátor kapacitása). Legyen $L = 1,\ R = 3,\ C = 0.5$.

Írjuk fel, milyen alakban keresendő az $I_p(t)$ partikuláris megoldás, valamint az (a), (b), (g) esetekben oldjuk is meg (azaz számítsuk ki a paramétereket), ha $F(t) :=$ ...

(a) $3\,e^t$; (b) $2\,e^{-t}$ (itt mutassuk meg azt is, hogy nem jönne ki a megoldás a t szorzó nélkül);

(c) $2t + 1$; (d) t; (e) t^2; (f) 3; (g) $\sin 2t$; (h) $e^{-t}\sin 2t$;

(i) $e^{2t} - \cos t$; (j) $4 + e^{-t}$.

3. Egy inga gerjesztett lengését az $y''(t)+4y(t) = f(t)$ KDE írja le. Mi az általános megoldás, ha:

(a) $f(t) = 2t$, (b) $f(t) = 4t^2$, (c) $f(t) = \cos 2t$?