Dr. Alex Küronya Sommersemester 2013

Übungsaufgaben zur Vorlesung "Gruppenwirkungen auf algebraischen Varietäten"

5. Blatt

Abgabetermin: Fr, 28.6.2013

Aufgabe 5-1 Es sei X eine affine Varietät über die komplexe Zahlen, $U, V \subseteq X$ disjunkte abgeschlossene algebraische Untermengen. Man zeige, dass es eine reguläre Funktion $f \in \mathbb{C}[X]$ gibt, für welche

$$f|_U \equiv 0 \quad \text{und} \quad f|_V \equiv 1$$

ist.

Aufgabe 5-2 Es sei R eine endlich erzeugte $\mathbb{C}$-Algebra, $G \looparrowright R$ eine rationale Gruppenwirkung einer geometrisch reduktiven Gruppe G. Man wähle jetzt beliebige Elemente $f_1, \ldots, f_r \in R^G$, und

$$f \in (f_1, \ldots, f_r)_R \cap R^G \ .$$

Zu zeigen, dass es eine natürliche Zahl $t > 0$ gibt, für welche

$$f^t \in (f_1, \ldots, f_r)_{R^G}$$

gilt.

Aufgabe 5-3 Bestimme die kategorische Quotient in den folgenden Fällen:

(a) $X = \mathbb{C}^2$, $G = \mathbb{C}^\times$ und $t \cdot (x, y) \mapsto (tx, t^2 y)$;
(b) $X = \mathbb{C}^2$, $G = \mathbb{C}^\times$ und $t \cdot (x, y) \mapsto (tx + y, x - ty)$.

Aufgabe 5-4 Man beweise, daß

(a) jeder affiner Morphismus separiert ist,
(b) falls $\phi\colon X_1 \to X$ ein affiner Morphismus ist und X einen guten Quotienten hat, dann hat auch X_1 einen guten Quotienten.

Aufgabe 5-5 Man zeige, daß die Wirkung

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}^\times \times \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \\ (t,x) & \mapsto & tx \end{array}$$

einen guten Quotienten hat, und daß $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^\times \simeq \mathbb{P}^n$ ist.

Aufgabe 5-6 Man beweise, daß

$$\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})' = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \mid A \text{ hat } n \text{ verschiedene Eigenwerte}\}$$

für die Wirkung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \times \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \\ (A,M) & \mapsto & A^{-1}MA\ . \end{array}$$