Dr. Alex Küronya Sommersemester 2013

Übungsaufgaben zur "Gruppenwirkungen auf algebraischen Varietäten"

1. Blatt

Abgabetermin: Fr, 3.5.2013

Aufgabe 1-1 Es sei G eine endliche Gruppe, V ein komplexer Vektorraum, $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung von G. Man schreibe ρ^* für die duale Darstellung. Beweise, dass für jeden $v \in V$,$\phi \in V^*$ und $g \in G$ gilt

$$\rho^*(g)(\phi)(\rho(g)v) \;=\; \phi(v)\ .$$

Aufgabe 1-2 Es sei L/K eine endliche Galois-Erweiterung mit Galois-Gruppe G, und betrachte die natürliche Wirkung

$$\begin{array}{rcl} G \times L & \longrightarrow & L \\ (\sigma, \alpha) & \mapsto & \sigma(\alpha)\ . \end{array}$$

Für ein beliebiges Element $a \in L$ beschreibe man G_a, Ga, und bestimme ihre Kardinalität.

Aufgabe 1-3 Eine Gruppenwirkung $\alpha : G \times X \to X$ heißt *transitiv*, falls sie genau eine Bahn besitzt. Man beweise, daß es für jede transitive Gruppenoperation $\alpha : G \times X \to X$ eine Untergruppe $H \leqslant G$ mit der Eigenschaft gibt, daß es eine kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \times G/H \arrow[r, "\tau_H"] \arrow[d, "\mathrm{id}_G \times \pi"'] & G/H \arrow[d, "\pi"] \\ G \times X \arrow[r, "\alpha"] & X\ . \end{tikzcd}$$

mit

$$\begin{array}{rcl} G/H & = & \text{Menge von Rechtsnebenklassen von } G \text{ bzg. } H, \\ \tau_H & = & \text{Translationswirkung von } G \text{ auf } G/H, \\ \pi & = & \text{Bijektion} \end{array}$$

existiert. Unter den Umständen sagt man, daß α und τ_H isomorph sind.

Aufgabe 1-4 (Burnside-Formel) Man beweise, daß es für eine beliebige Gruppenwirkung $\alpha : X \times G \to G$ mit G und X endlich

$$|X/G| \;=\; \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |\operatorname{Fix}(g)|$$

gilt.

Aufgabe 1-5 Es sei $\alpha : G \times X \to X$ eine Gruppenwirkung mit G und X endlich. Dann gilt

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |\operatorname{Fix}(g)|^2 \;\geq\; 2\ .$$