Oliver Fabert/Alex Küronya 21. Mai 2012
Patrick Graf Blatt 5

Übungen zu „Geometrie und Algebra vollständig integrabler Systeme“

Die folgenden Aufgaben sind am Dienstag, den 29. Mai, in der Vorlesung oder bis 12 Uhr direkt bei Patrick Graf (Zimmer 408) abzugeben.

Aufgabe 18 Es sei G eine Liegruppe. Die Wirkung von G auf sich selbst durch Rechtstranslation liftet zu einer symplektischen Wirkung auf dem Kotangentialbündel, nämlich

$$\psi_g(h, v) = (hg^{-1}, dR_g(hg^{-1})^* v).$$

Zeigen Sie, daß eine Impulsabbildung $\mu\colon T^*G \to \mathfrak{g}^*$ durch die Linkstranslation $\mu(h, v) = -L_h^* v$ gegeben ist.

Aufgabe 19 Die unitäre Gruppe $U(1) = S^1$ operiere auf der komplexen Ebene $\mathbb{C}^2$ durch komponentenweise Multiplikation. Berechnen Sie die Impulsabbildung sowie den symplektischen Quotienten dieser Hamiltonschen Gruppenwirkung.

Aufgabe 20 Sei V ein geradedimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Sei $\Omega(V)$ die Menge der symplektischen Formen auf V und $\mathrm{J}(V)$ die Menge der komplexen Strukturen auf V. Wählen Sie ein $\omega \in \Omega(V)$ und ein $J \in \mathrm{J}(V)$. Sei $\mathrm{Sp}(V, \omega)$ die Gruppe der Symplektomorphismen von (V, ω) und $\mathrm{GL}(V, J)$ die Gruppe der komplexen Isomorphismen von (V, J). Zeigen Sie, daß es natürliche Bijektionen von Mengen

$$\mathrm{GL}(V)/\,\mathrm{Sp}(V, \omega) \xrightarrow{\sim} \Omega(V)$$

und

$$\mathrm{GL}(V)/\,\mathrm{GL}(V, J) \xrightarrow{\sim} \mathrm{J}(V)$$

gibt.

Aufgabe 21 Sei (V, ω) ein symplektischer Vektorraum, und sei $J : V \to V$, $J^2 = -\mathrm{id}$, eine komplexe Struktur auf V. Zeigen Sie:

a) J sei ω-kompatibel und L sei ein Lagrangescher Unterraum von (V, ω). Dann ist auch JL Lagrangesch, und es gilt $JL = L^\perp$, wobei $^\perp$ sich auf das Skalarprodukt $G_J(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$ bezieht.

Folgern Sie:

b) J ist ω-kompatibel genau dann, wenn (V, ω) eine symplektische Basis $\{e_i, f_i\}$ mit $f_i = Je_i$ besitzt.