Oliver Fabert/Alex Küronya
Patrick Graf

14. Mai 2012
Blatt 4

Übungen zu „Geometrie und Algebra vollständig integrabler Systeme“

Die folgenden Aufgaben sind am Dienstag, den 22. Mai, in der Vorlesung oder bis 12 Uhr direkt bei Patrick Graf (Zimmer 408) abzugeben.

Aufgabe 14 Sei $\mathbb{R}^{2n}$ mit Koordinaten q_i, p_i und der symplektischen Standardform $\omega = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i$ gegeben. Die Poisson-Klammer $\{\cdot,\cdot\}$ auf $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ ist dann durch

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}$$

gegeben. Rechnen Sie die Jacobi-Identität für $\{\cdot,\cdot\}$ nach.

Aufgabe 15 Eine symplektische Mannigfaltigkeit (M,ω) heißt exakt, falls $\omega = \mathrm{d}\lambda$ exakt ist. Eine symplektische Gruppenwirkung ψ von G auf M heißt exakt, falls $\psi_g^*\lambda = \lambda$ für alle $g \in G$. Zeigen Sie, daß jede exakte Wirkung schwach Hamiltonsch ist.

Bemerkung: Exakte Wirkungen sind sogar Hamiltonsch.

Aufgabe 16 Zeigen Sie:

a) Die Liegruppe G operiere Hamiltonsch auf M_i mit Impulsabbildung $\mu_i\colon M_i \to \mathfrak{g}^*$ für $i = 1,2$. Dann ist die Diagonalwirkung von G auf $M_1 \times M_2$ Hamiltonsch mit Impulsabbildung $\mu\colon M_1 \times M_2 \to \mathfrak{g}^*$,
$$\mu(p_1,p_2) = \mu_1(p_1) + \mu_2(p_2).$$

Folgern Sie aus a):

b) Die Liegruppe G_i operiere Hamiltonsch auf M_i mit Impulsabbildung $\mu_i : M_i \to \mathfrak{g}_i^*$ für $i = 1,2$. Dann ist die Diagonalwirkung von $G_1 \times G_2$ auf $M_1 \times M_2$ Hamiltonsch mit Impulsabbildung $\mu\colon M_1 \times M_2 \to \mathfrak{g}_1^* \oplus \mathfrak{g}_2^*$,
$$\mu(p_1,p_2) = (\mu_1(p_1), \mu_2(p_2)).$$

Aufgabe 17 Die spezielle orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}(3)$ wirke diagonal auf $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, daß unter einer geeigneten Identifikation $\mathfrak{so}(3) \cong \mathbb{R}^3$ die Impulsabbildung dieser Wirkung gegeben ist durch
$$\mu\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \mu(q,p) = q \times p.$$

Hierbei bezeichnet $\times$ das Kreuzprodukt.