Oliver Fabert/Alex Küronya 2. Mai 2012
Patrick Graf Blatt 2

Übungen zu „Geometrie und Algebra vollständig integrabler Systeme“

Die folgenden Aufgaben sind am Dienstag, den 8. Mai, in der Vorlesung oder bis 12 Uhr direkt bei Patrick Graf (Zimmer 408) abzugeben.

Aufgabe 7 Sei $S \in \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{R})$ eine reelle $2n \times 2n$-Matrix, und sei $J := \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$, wobei E_n die $n \times n$-Einheitsmatrix bezeichne. Zeigen Sie:

a) S ist symplektisch $\Leftrightarrow S^T J^T S = J^T$.

b) Sei $\psi_S(t) := t^{-n}\chi_S(t)$, wobei χ_S das charakteristische Polynom von S ist. Wenn S symplektisch ist, dann gilt $\psi_S(t) = \psi_S(t^{-1})$.

c) Gilt auch die Umkehrung von b)?

d) Sei S symplektisch und λ ein Eigenwert von S. Dann ist auch λ^{-1} ein Eigenwert von S.

Aufgabe 8 Sei (M, ω) eine $2n$-dimensionale kompakte symplektische Mannigfaltigkeit, und sei $\omega^{\wedge n}$ die Volumenform, die durch das n-fache Dachprodukt von ω mit sich selbst gegeben ist. Zeigen Sie:

a) Die de Rhamsche Kohomologieklasse $[\omega^{\wedge n}] \in H^{2n}_{\mathrm{dR}}(M)$ ist nicht Null.

Hinweis: Satz von Stokes.

b) $[\omega] \in H^2_{\mathrm{dR}}(M)$ ist selbst nicht Null, d.h. ω ist nicht exakt.

c) Für $n \geq 2$ gibt es keine symplektische Struktur auf der Sphäre S^{2n}.

Aufgabe 9 Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Wir nehmen an, daß eine 1-Form α existiert, sodaß $\omega = -\mathrm{d}\alpha$. (Dies ist z.B. der Fall, wenn M der Totalraum des Kotangentialbündels einer Mannigfaltigkeit und ω die kanonische symplektische Form ist.) Zeigen Sie:

a) Es gibt genau ein Vektorfeld v, sodaß $\iota_v\omega = -\alpha$, wobei $\iota_v\omega$ die Kontraktion von ω mit v bezeichnet.

b) Wenn $g : M \to M$ ein Symplektomorphismus ist, der α erhält (d.h. $g^*\alpha = \alpha$), dann kommutiert g mit dem von v erzeugten Fluß, d.h.

$$(\exp tv) \circ g = g \circ (\exp tv).$$

Hinweis: Zeigen Sie, daß $g \circ (\exp tv) \circ g^{-1}$ der von g_*v erzeugte Fluß ist, und überlegen Sie sich, daß dies genügt.