Oliver Fabert/Alex Küronya
Patrick Graf

19. April 2012
Blatt 1

Übungen zu „Geometrie und Algebra vollständig integrabler Systeme“

Die folgenden Aufgaben sind am Donnerstag, den 3. Mai, in der Vorlesung oder bis 12 Uhr direkt bei Patrick Graf (Zimmer 408) abzugeben.

Sei (V, ω) ein symplektischer Vektorraum. Für einen Untervektorraum $Y \subset V$ definieren wir sein *symplektisch orthogonales Komplement*

$$Y^\omega = \{v \in V \mid \omega(v, u) = 0 \text{ für alle } u \in Y\}.$$

Y heißt *symplektisch*, falls $\omega|_{Y \times Y}$ nichtentartet ist.
Y heißt *isotrop*, falls $Y \subset Y^\omega$ (d.h. $\omega|_{Y \times Y} \equiv 0$).
Y heißt *koisotrop*, falls $Y^\omega \subset Y$.
Y heißt *Lagrangesch*, falls Y isotrop ist mit $\dim Y = \frac{1}{2} \dim V$.

Aufgabe 1 Seien Y und W Untervektorräume von V. Zeigen Sie:

i) $\dim Y + \dim Y^\omega = \dim V$.

ii) $(Y^\omega)^\omega = Y$.

iii) $Y \subset W \Leftrightarrow W^\omega \subset Y^\omega$.

Aufgabe 2 Sei Y ein Untervektorraum von V. Zeigen Sie:

i) Y ist symplektisch $\Leftrightarrow Y \cap Y^\omega = 0 \Leftrightarrow V = Y \oplus Y^\omega$.

ii) Falls Y isotrop ist, dann gilt $\dim Y \leqslant \frac{1}{2} \dim V$.

iii) Y ist Lagrangesch $\Leftrightarrow$ Y ist isotrop und koisotrop $\Leftrightarrow Y = Y^\omega$.

Aufgabe 3 Sei Y ein Lagrangescher Unterraum von (V, ω). Zeigen Sie: Jede Basis $e_1, \ldots, e_n$ von Y kann zu einer symplektischen Basis $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ von (V, ω) ergänzt werden.

Sei ab jetzt V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Aufgabe 4 Sei $\omega \in \bigwedge^2 V^*$, und sei $u_1^*, \ldots, u_k^*, e_1^*, \ldots, e_n^*, f_1^*, \ldots, f_n^*$ eine Basis von V^*, die dual ist zu einer Basis von V, bezüglich derer ω die Standardform hat. Zeigen Sie: $\omega = e_1^* \wedge f_1^* + \cdots + e_n^* \wedge f_n^*$.

Aufgabe 5 Eine symplektische Form ist eine nichtentartete 2-Form $\omega \in \bigwedge^2 V^*$. Zeigen Sie: Wenn ω eine symplektische Form auf V ist, und $\dim V = 2n$, dann ist $\omega^{\wedge n} = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$ (n-mal) nicht Null.

Aufgabe 6 Sei umgekehrt $\omega \in \bigwedge^2 V^*$ eine 2-Form. Zeigen Sie: Falls $\omega^{\wedge n} \neq 0$, dann ist ω symplektisch.