2010.04.20.

REPRESENTATION THEORY/SPRING 2010/ E. Horváth and A. Küronya
PRACTICE SESSION 11

1. Mutassuk meg, hogy ha egy ϕ lineáris transzformációnak v a_i sajátértékhez tartozó átalánosított sajátvektora, akkor ez legfeljebb m_i indexű sajátvektor, ahol m_i ϕ karakterisztikus polinomjában $(x - a_i)$ kitevője.

2. (HF) Legyen $\delta \in Der(A)$ egy A algebra derivációja. Legyen a, b δ két sajátértéke, $x, y \in A$. Mutassuk meg, hogy

$$(\delta - (a+b) \cdot id)^n(xy) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\delta - a \cdot id)^i x (\delta - b \cdot id)^{n-i} y \ .$$

3.(Cartan-kritérium) A trace-lemma segítségével lássuk be: Legyen $L \leq gl(V)$ Lie-algebra, $dim_F V < \infty$, F algebrailag zárt, 0 karakterisztikájú test. Mutassuk meg, hogy ha minden $x \in [L, L]$ és $y \in L$ esetén $Tr(xy) = 0$, akkor L feloldható.

4. Mutassuk meg, hogy ha L véges dimenziós Lie-algebra F algebrailag zárt, 0 karakterisztikájú test felett, akkor ha $Tr(adxady) = 0$, minden $x \in [L, L]$ és minden $y \in L$ esetén akkor L feloldható.

5. Legyen L Lie-algebra I ideál L-ben. κ legyen L Killing-formája, κ_I pedig az I Lie-algebra Killing-formája. Mutassuk meg, hogy $\kappa_I = \kappa_{I \times I}$.

6. (HF) Számítsuk ki az $sl(2, F)$ Killing-formájának mátrixát a standard bázisban (x, h, y). Mutassuk meg, hogy ez nem elfajuló, ha a test karakterisztikája nem 2.

7. Mutassuk meg, hogy algebrailag zárt, 0 karakterirsztikájú test feletti véges dimenziós Lie-algebra pontosan akkor féligegyszerű, ha Killing-formája nem elfajuló.

8. Mutassuk meg, hogy az a 3 dimenziós $L = \langle x, y, z \rangle$ Lie-algebra, mely $[x, y] = z, [x, z] = y, [y, z] = 0$ azonosságokkal van definiálva, feloldható, azaz $rad(L) = L$, de $rad(\kappa) < L$, ha a test karakterisztikája nem 2.

9. Mutassuk meg, hogy ha V vektrotér, $U \leq V$ altér és $f : V \times V \to F$ bilineáris függvény, akkor
a) $dimU^{\perp} \geq dimV - dimU$.
b) Ha (U, f) nem elfajuló, akkor $U \oplus U^{\perp} = V$.

10. Legyen L véges dimenziós, féligegyszerű Lie-algebra (azaz, $rad(L) = 0$). Mutassuk meg, hogy
a)L véges sok egyszerű ideál direkt összege: $L = \oplus_{i=1}^{t} L_i$.
b) Mindeni L-beli egyszerű ideaál valamelyik L_i-vel egyezik meg
c) L_i Killing-formája $\kappa_{L_i \times L_i}$.

11. Mutassuk meg, hogy ha L véges dimenziós, féligegyszerű Lie-algebra, akkor $[L, L] = L$.

12. Mutassuk meg, hogy ha L véges dimenziós, féligegyszerű Lie-algebra, akkor minden ideálja és homomorf képe vagy 0 vagy féliegegyszerű, és minden ideál néhány L_i direkt összege.

13. Mutassuk meg, hogy ha $\delta \in Der(L)$ és $x \in L$, ahol L Lie-algebra, akkor $[\delta, adx] = ad(\delta x)$.

14. Mutassuk meg, hogy ha L véges dimenziós, féligegyszerű Lie-algebra akkor a Killing-forma megszorítása minden ideálra nem elfajuló.

15. Mutassuk meg, hogy ha L féligegyszerű, akkor $ad(L) = Der(L)$.

16. Mutassuk meg, hogy minden $L \to gl(V)$ Lie-algebra reprezentáció egy L-modulust definiál, és minden L-modulus egy reprezentációt definiál, és ez a megfeleltetés bijektív.

17.Legyen M L Lie-algebra feletti véges dimenziós modulus. Mutassuk meg, hogy ekvivalensek:
a)M modulus véges sok irreducibilis modulus direkt összege
b) Minden részmodulushoz van M-ben direkt kiegészítő.

18.(Schur-lemma) Mutassuk meg, hogy ha F algebrailag zárt test, L Lie-algebra F felett, $\phi : L \to gl(V)$ reprezentáció, amely irreducibilis (azaz a megfelelő modulusnak nincs valódi részmodulusa) és $a \in End(V)$ felcserélhető $\phi(l)$-lel, minde $l \in L$-re, akkor $a = \alpha \cdot id$, ahol $\alpha \in F$.