2010.04.13.

REPRESENTATION THEORY/SPRING 2010/ E. Horváth and A. Küronya
PRACTICE SESSION 10

1. Legyen L Lie-algebra.
a) Mutassuk meg, hogy ha L nilpotens, akkor L minden részalgebrája és minden faktoralgebrája is nilpotens.
b) Mutassuk meg, hogy ha $L/Z(L)$ nilpotens, akkor L is nilpotens.
c) Mutassuk meg, hogy ha L nilpotens, akkor $Z(L) \neq 0$

2. Mutassuk meg, hogy van olyan $gl(n,F)$-beli elem, amely ad-nilpotens, de nem nilpotens!

3. Legyen V n-dimenziós vektortér. Legyen $L \leq gl(V)$ véges dimenziós, lineáris Lie-algebra, amely nilpotens lineáris transzformációkból áll. Mutassuk meg, hogy van V-ben olyan bázis, amelyben minden $x \in L$ szigorúan felső háromszögmátrix.

4. Mutassuk meg, hogy ha L véges dimenziós nilpotens Lie-algebra és K ideál L-ben, akkor $K \cap Z(L) \neq 0$.

5. Legyen $V \neq 0$ véges dimenziós vektortér algebrailag zárt, 0 karakterisztikájú F test felett. Legyen $L \leq gl(V)$ feloldható Lie-algebra. Mutassuk meg, hogy van a L-beli elemeknek közös sajátvektoruk. Indukciót alkalmazzunk $dimL$-re.
5/1 $dimL = 0$ eset.
5/2 Mutassuk meg, hogy van L-ben 1-kodimenziós K ideál!
5/3 Mutassuk meg, hogy a K-beli elemeknek van közös sajátvektoruk!
5/4 Mutassuk meg, hogy ha v közös sajátvektora K-beli elemeknek, akkor $kv = \lambda(k)v$, ahol $\lambda : K \to F$ lineáris funkcionál.
5/5 Legyen λ egy 5/4-beli rögzített funkcionál. Legyen $W := \{w \in V \setminus \{0\} | kw = \lambda(k)w$ minden $k \in K\}$. Mutassuk meg, hogy hogy ez L-invariáns!
5/5a) Először fixáljunk egy $w \in W$ vektort és egy $l \in L$-t. Legyen n minimális olyan, hogy $w, lw, l^2w, \ldots, l^nw$ összefüggő.
Legyen $W_i := \langle w, lw, \ldots, l^{i-1}w \rangle$. Indukcióval mutassuk meg, hogy minden $k \in K$ minden W_i-t invariánsan hagy és $kl^iw = \lambda(k)l^iw \mod W_i$.
5/5b) Írjuk fel k mátrixát $w, lw, \ldots, l^{n-1}w$ bázisban, mutassuk meg, hogy ennek nyoma $n\lambda(k)$.
5/5/c) Mutassuk meg, hogy $[l,k]$ nyoma nulla, és így $\lambda([l,k]) = 0$.
5/5/d) Mutassuk meg, hogy $klw = lkw - [l,k]w = l\lambda(k)w - \lambda([l,k])w$. Ebből vezessük le, hogy $lw \in W$.
5/6 Legyen $z \in L \setminus K$. Mutassuk meg, hogy z-nek van W-ben v_0 sajátvektora.
Mutassuk meg, hogy v_0 az L-beli elemeknek is közös sajátvektora!

6.(HF) Legyen V véges dimenzós vektortér F algebrailag zárt 0 karakterisztikájú test felett, $L \leq gl(V)$ felodható Lie-lagebra. Mutassuk meg, hogy alkalmas bázisban L elemei közösen felső háromszög alakra hozhatók! (Lie-tétele)
Általánosabban: Legyen L felodható Lie-algebra algebrailag zárt, 0 karakterisztikájú test felett.

Legyen $\phi : L \to gl(V)$ reprezentáció. Mutassuk meg, hogy $\phi(L)$ elemei alkalmas bázisban közösen felső háromszög alakra hozhatók.

7. Legyen L véges dimenziós, feloldható Lie-algebra algebrailag zárt, 0 karakterisztikájú test felett. Mutassuk meg, hogy van L-ben egy $0 = L_0 < ... < L_n = L$ ideállánc, ahol $\dim L_i = i$.

8. Legyen L véges dimenziós, feloldható Lie-algebra algebrailag zárt, 0 karakterisztikájú test felett. Mutassuk meg, hogy $x \in [L, L]$ esetén $ad_L x$ nilpotens, speciálisan, $[L, L]$ nilpotens Lie-algebra.

9. Mutassuk meg, hogy ha F algebrailag zárt test, $A, B \in End_F(V)$ féligegyszerű lineáris transzformációk felcserélhetőek, akkor van V-ben olyan bázis, amelyben mindkettő mátrixa diagonális mátrix!

10.(HF) Legyen F algebrailag zárt, $A, B \in End_F(V)$ féligegyszerű és $AB = BA$. Mutassuk meg, hogy $A + B, A - B$ szintén féligegyszerű!
Mutassuk meg, hogy ha $A \in End_F(V)$ féligegyszerű, akkor minden $W \leq V$ A-ra invariáns altérre A_W is féligegyszerű!

11. Mutassuk meg, hogy ha $p_i(x) \in F[x]$ páronként relatív prím polinomok, $r_i(x), i = 1, \ldots, t$ tetszőleges polinomok, akkor létezik olyan $p(x)$ polinom, amelyre $p(x) \equiv r_i(x) \mod (p_i(x))$ $i = 1 \ldots, t$.

12. Legyen F algebrailag zárt test, $x \in End_F(V)$ karakterisztikus polinomja $\prod(T - a_i)^{m_i}$. Legyen $V_i = Ker(x - a_i id_V)^{m_i}$. Mutassuk meg, hogy ekkor $V = \oplus V_i$, és minden V_i x-re invariáns, x_{V_i} karakterisztikus polinomja $(T - a_i)^{m_i}$.

13. Legyen $x \in End_F(V)$ karakterisztikus polinomja $\prod(T - a_i)^{m_i}$. Legyen $p(T) \equiv a_i \mod (T - a_i)^{m_i}$,$i = 1, \ldots t$, $p(T) \equiv 0 \mod (T)$megoldása. Legyen $x_s := p(x), x_n := q(x)$, ahol $q(T) = T - p(T)$.
a)Mutassuk meg, hogy x_s, x_n felcserélhetők, és x-szel is felcserélhetők,és minden x-szel felcserélhető transzformációval is felcserélhetőek.
b) Mutassuk meg, hogy minden (12. feladatbeli) V_i altér x_s-re és x_n-re invariáns.
c) Mutassuk meg, hogy $x_{sV_i} = a_i id_{V_i}$, $x_n = x - x_s$ nilpotens lineáris transzformáció.
d) $x = x_s + x_n$ felbontás egyértelmű felcserélhető féligegyszerű és nilpotens lineáris transzformációkra.

14. Mutassuk meg, hogy ha $x \in gl(V)$
a) és x nilpotens, akkor adx is nilpotens, ha x féliglegyszerű akkor adx is féligegyszerű $End(End(V))$-ben!
b) Mutassuk meg, hogy $[adx_s, adx_n] = 0$, $adx = adx_s + adx_n$.
c) Mutassuk meg, hogy $adx = adx_s + adx_n$, adx Jordan-felbontása $End(End(V))$-ben.