Rácsfélcsoportok az algebrában és a geometriában

VÁLASZTHATÓ TÁRGY ALKALMAZOTT MATEMATIKUS HALLGATÓKNAK, DE FIZIKUSOK HALLGATÓK SZÁMÁRA IS ÉRDEKES LEHET

2009/10 tanév II. félév
Küronya Alex egyetemi docens (Algebra tanszék)

Hely és időpont: H 601, hétfő 10:15–12:00 (egyenlőre)
Email: `kalex@math.bme.hu`

Tárgyleírás: A tárgy a matematika két, nagyon régóta vizsgált területének, a konvex geometriának és az euklideszi tér egész koordinátájú pontjai vizsgálatának az ötvözete. Noha a felhasznált eszközök elemiek (az anyag követése várhatóan nem okoz gondot egy másodéves B.Sc. hallgatónak), ismertetésre kerülő formájában új, mindössze az elmúlt pár évben fogalmazódott meg.

Konvex politópok rácspontjai hagyományosan igen fontos szerepet játszottak például a számelméletben, kombinatorikában és reprezentációelméletben, újabban viszont a rácsfélcsoportokhoz rendelt ún. Okounkov-testek révén a magasabb-dimenziós algebrai geometriában is határozott jelentőségre tettek szert.

A modern megfogalmazas úttörője a 2006-ban Fields-érmet kapott Andrei Okounkov volt, akinek az ötleteit továbbfejlesztve született meg a modern elmélet Kaveh–Khovanskii és Lazarsfeld–Mustaţă kezei köžott.

A félév első felében áttekintjük a konvex geometria és a konvex politópok elméletének alapjait, külön figyelmet szentelve a Minkowski-összeg és a vegyes térfogat fogalmainak. Megtárgyaljuk a Brunn–Minkowski és Alexandrov-Fenchel egyenlőtlenségeket, amelyeket részben be is bizonyítunk (ha minden jól megy, a félév végére nem csak részben). Ezután áttérünk konvex testek rácspontjainak vizsgálatára, a Kaveh–Khovanskii cikkeket követve. Egy tipikus állítás, amelyet be fogunk látni: legyen $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ egy konvex test, $\#m\Delta$ a Δ m-szeresében lévő $\mathbb{Z}^n$-beli pontok száma. Ekkor

$$\lim_m \frac{\#m\Delta}{m^n} = \mathrm{Vol}_n(\Delta) ,$$

azaz az $m\Delta$-beli rácspontok száma aszimptotikusan megegyezik Δ térfogatával.

A félév utolsó részet annak szenteljük, hogy konvex geometriai eszközeinkkel leírjuk rácsfélcsoportok elemszámának eloszlását, formulákat adjunk polinomoknak a félcsoport elemein való összegzésére, esetleg (a hallgatóság hátterétől függően) algebrai geometriai alkalmazasokat is mutatva.

Még egyszer hangsúlyoznám, hogy a téma egyszerre elemi (tehát egy másodéves matematikushallgató számára is követhető) és friss kutatási terület, s így alkalmas TDK vagy doktori dolgozat témájának.

Irodalom:

- G. Ewald: Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry, Springer, Graduate Texts in Mathematics
- Peter M. Gruber: Convex and Discrete Geometry, Springer, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 336.
- Kiumars Kaveh – A. G. Khovanskii: Mixed volume and an extension of intersection theory of divisors, `arXiv:0812.0433`.
- Kiumars Kaveh – A. G. Khovanskii: Convex bodies and algebraic equations on affine varieties, `arXiv:0804.4095`.
- Kiumars Kaveh – A. G. Khovanskii: Newton–Okounkov bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory, `arXiv:0904.3350`.
- Rolf Schneider: Convex Bodies: The Brunn–Minkowski Theory, Cambridge University Press, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 1993.

Előfeltételek: Lineáris algebra és Algebra I. elvégzése, vagy azzal ekvivalens tudás.

Házi feladatok és osztályozás: Kétféleképpen lehet jegyet szerezni: vagy a félév közben hetente kiadott házi feladatok beadásával, vagy pedig a félév végén írásbeli vizsga során.