Algebrai topológia / 2010 tavasz / Küronya Alex

8. Házi feladat

Definíció. Legyenek X,Y topologikus terek, $A \subseteq X$ zárt részhalmaz, $f : A \to Y$ folytonos leképezés. Ekkor X-nek és Y-nak az f mentén történő *összeragasztása*:

$$X \cup_f Y \stackrel{\text{def}}{=} X \coprod Y / \simeq ,$$

ahol $\sim$ az $a \sim f(a)$ $(a \in A)$ relációk által generált ekvivalenciareláció.

1. Az iménti definíció jelölésivel mutassuk meg, hogy
   (1) a $\pi \circ i_Y : Y \hookrightarrow X \coprod Y \to X \cup_f Y$ leképezés beágyazza Y-t egy zárt altérre;
   (2) a $\pi \circ i_X|_{X \setminus A} : X \setminus A \hookrightarrow X \coprod Y \to X \cup_f A$ leképezés beágyazza $X \setminus A$-t egy nyílt altérre;
   (3) ha f zárt leképezés, akkor π is.

A fentiekben $\pi : X \coprod Y \to X \cup_f Y$ a természetes hányadosleképezés.

2. Az eddigi jelölésekkel igazoljuk, hogy ha X,Y normális terek, f zárt leképezés, akkor $X \cup_f Y$ is normális.

3. * Legyen K egy CW-komplexus, $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq K^{(n)}$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:
   (1) $A \subseteq K^{(n)}$ nyílt/zárt
   (2) minden $\alpha \in J_n$ esetén $f_\alpha^{-1}(A) \subseteq \mathbb{D}^n_\alpha$ nyílt/zárt
   (3) minden $\alpha \in J_n$ esetén $A \cap K_\alpha \subseteq K_\alpha$ nyílt/zárt.

4. Legyen K CW-komplexus, X topologikus tér, $g : K \to X$ egy függvény. Ekkor g pontosan akkor folytonos, ha $g \circ f_\alpha : \mathbb{D}^n_\alpha \to X$ folytonos minden $n \in \mathbb{N}$ és $\alpha \in J_n$ esetén.

5. * Legyen K egy CW-komplexus, $L \subseteq K$ egy részkomplexus, α egy L-beli cella. Ekkor $K_\alpha \subseteq L$, és minden nyílt, K_α-t metsző cella része L-nek.

6. * Mutassuk meg, hogy a redukált homológiaelméletre vonatkozó hosszú egzakt sorozat valóban egzakt.

7. Definiáljuk az n-dimenziós komplex projektív teret mint topologikus teret az alábbi módon:

$$\mathbb{CP}^n \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim ,$$

ahol $v \sim w$ pontosan akkor, ha létezik $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, amelyre $w = \lambda v$. Mutassuk meg, hogy a komplex projektív tér előáll

$$\mathbb{CP}^n \approx \mathbb{D}^{2n} / \sim'$$

alakban, ahol $\sim'$ egy megfelelően választott ekvivalenciareláció. Adjunk meg egy olyan CW-komplexus-struktúrát $\mathbb{CP}^n$-en, amelynek csak páros dimenziókban vannak cellái.