

8. HÁZI FELADAT

DEFINÍCIÓ. Legyenek  $X, Y$  topologikus terek,  $A \subseteq X$  zárt részhalmaz,  $f : A \rightarrow Y$  folytonos leképezés. Ekkor  $X$ -nek és  $Y$ -nak az  $f$  mentén történő *összeragasztása*:

$$X \cup_f Y \stackrel{\text{def}}{=} X \amalg Y / \simeq ,$$

ahol  $\sim$  az  $a \sim f(a)$  ( $a \in A$ ) relációk által generált ekvivalenciareláció.

1. Az iménti definíció jelölésével mutassuk meg, hogy
  - (1) a  $\pi \circ i_Y : Y \hookrightarrow X \amalg Y \rightarrow X \cup_f Y$  leképezés beágyazza  $Y$ -t egy zárt altérre;
  - (2) a  $\pi \circ i_X|_{X \setminus A} : X \setminus A \hookrightarrow X \amalg Y \rightarrow X \cup_f Y$  leképezés beágyazza  $X \setminus A$ -t egy nyílt altérre;
  - (3) ha  $f$  zárt leképezés, akkor  $\pi$  is.

A fentiekben  $\pi : X \amalg Y \rightarrow X \cup_f Y$  a természetes hányadosleképezés.

2. Az eddigi jelölésekkel igazoljuk, hogy ha  $X, Y$  normális terek,  $f$  zárt leképezés, akkor  $X \cup_f Y$  is normális.

3. \* Legyen  $K$  egy CW-komplexus,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A \subseteq K^{(n)}$ . Ekkor az alábbiak ekvivalensek:

- (1)  $A \subseteq K^{(n)}$  nyílt/zárt
- (2) minden  $\alpha \in J_n$  esetén  $f_\alpha^{-1}(A) \subseteq \mathbb{D}_\alpha^n$  nyílt/zárt
- (3) minden  $\alpha \in J_n$  esetén  $A \cap K_\alpha \subseteq K_\alpha$  nyílt/zárt.

4. Legyen  $K$  CW-komplexus,  $X$  topologikus tér,  $g : K \rightarrow X$  egy függvény. Ekkor  $g$  pontosan akkor folytonos, ha  $g \circ f_\alpha : \mathbb{D}_\alpha^n \rightarrow X$  folytonos minden  $n \in \mathbb{N}$  és  $\alpha \in J_n$  esetén.

5. \* Legyen  $K$  egy CW-komplexus,  $L \subseteq K$  egy részkomplexus,  $\alpha$  egy  $L$ -beli cella. Ekkor  $K_\alpha \subseteq L$ , és minden nyílt,  $K_\alpha$ -t metsző cella része  $L$ -nek.

6. \* Mutassuk meg, hogy a redukált homológiaelméletre vonatkozó hosszú egzakt sorozat valóban egzakt.

7. Definiáljuk az  $n$ -dimenziós komplex projektív teret mint topologikus teret az alábbi módon:

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^n \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim ,$$

ahol  $v \sim w$  pontosan akkor, ha létezik  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ , amelyre  $w = \lambda v$ . Mutassuk meg, hogy a komplex projektív tér előáll

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^n \approx \mathbb{D}^{2n} / \sim'$$

alakban, ahol  $\sim'$  egy megfelelően választott ekvivalenciareláció. Adjunk meg egy olyan CW-komplexus-struktúrát  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ -en, amelynek csak páros dimenziókban vannak cellái.