Algebrai topológia / 2010 tavasz / Küronya Alex

7. Házi feladat

1. (5-lemma) Tekintsük az alábbi kommutatív diagramot, amelyben mindkét sor egzakt.

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\epsilon} \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array} .$$

Bizonyítsuk be, hogy

- ha β és δ szürjektív, ϵ injektív, akkor γ szürjektív.
- ha β és δ injektív, α szürjektív, akkor γ injektív.
- ha $\alpha, \beta, \delta, \epsilon$ mind izomorfizmusok, akkor γ is az.

2. * Legyen (X, A) tetszőleges pár. Igazoljuk, hogy $\Delta_p(A) \leqslant \Delta_p(X)$. Mutassuk meg, hogy

$$\Delta_p(X, A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta_p(X)}{\Delta_p(A)}$$

izomorf azzal a szabad abel csoporttal, amelyet azok az X-beli szinguláris p-szimplexek generálnak, amelyeknek a képe nem része A-nak.

3. Mutassuk meg, hogy minden $\mathbb{RP}^n \to \mathbb{RP}^n$ leképezésnek van fixpontja.

4. Hogyan definiáljuk két topologikus tér diszjunkt unióját mint topologikus teret?

5. * Mutassuk meg, hogy a homológiaelméletek additivitási axiómája következik a többiből véges sok tag esetén.